ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

5.5 Συστήματα μη ομογενών γραμμικών δ.ε.

Βασική Ιδέα:

Για να λύσω ένα μη ομογενές σύστημα δ.ε., δουλεύω ως εξής:

- Βρίσκω την γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς.
- Υπολογίζω μια (οποιαδήποτε) μερική λύση του πλήρους συστήματος.
- Η γενική λύση του πλήρους συστήματος είναι το άθροισμα της γενικής λύσης του ομογενούς και της μερικής λύσης του πλήρους

Παρατήρηση: Ακριβώς το ίδιο που συνέβαινε με τις γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, της μορφής: ay''+by'+cy=f(x).

Παράδειγμα: Έστω το επόμενο μη ομογενές σύστημα δ.ε.:

$$(\Sigma.5)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - 5x_2 + 2\eta\mu t \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$

Να βρεθεί η γενική του λύση, καθώς και η μερική του λύση που αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες: $x_1(0)=0$ και $x_2(0)=0$

Λύση:

α) Γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος:

$$(\Sigma.6)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - 5x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$

Το ομογενές (Σ.6) μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή: $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, με τη βοήθεια των πινάκων:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Αναζητούμε λοιπόν τις ιδιοτιμές του πίνακα A:

$$\det\begin{bmatrix} 2-r & -5 \\ 4 & -6-r \end{bmatrix} = \det\left[A - rI\right] = r^2 + 4r + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2 \pm 2i$$

και τα ιδιοδιανύσματά του:

i) Για $r_1 = -2 + 2i$

$$\left[A-(-2+2i)I\right] = \begin{bmatrix} 4-2i & -5 \\ 4 & -4-2i \end{bmatrix}$$

από το οποίο προκύπτει το αόριστο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} (4-2i)k_1 - 5k_2 &= 0 \\ 4k_1 + (-4-2i)k_2 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $k_1 = 1$, έχουμε $k_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα: $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} 5 \\ 4-2i \end{bmatrix}$.

ii) Για $r_2 = -2-2i$

$$\left[A-(-2-i)I\right] = \begin{bmatrix} 4+2i & -5 \\ 4 & -4+2i \end{bmatrix}$$

από το οποίο προκύπτει το αόριστο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} &(4+2i)k_1 - 5k_2 = 0 \\ &4k_1 + (-4+2i)k_2 = 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $k_1 = 1$, έχουμε $k_2 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα: . $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} 5 \\ 4+2i \end{bmatrix}$

Χρησιμοποιώντας την σχέση του Euler έχουμε:

$$e^{r_1 t} = e^{(-2+2i)t} = e^{-2t+2it} = e^{-2t}e^{2it} = e^{-2t}\left(\text{συν}2t + i\text{ημ}2t\right)$$

και

$$e^{r_2 t} = e^{(-2-2i)t} = e^{-2t}\left(\text{συν}2t - i\text{ημ}2t\right)$$

Επομένως η γενική λύση του (Σ.6):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4-2i & 4+2i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t}\left(\text{συν}2t + i\text{ημ}2t\right) \\ c_2 e^{-2t}\left(\text{συν}2t - i\text{ημ}2t\right) \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} x_{1o}(t, c_1, c_2) &= 5c_1 e^{-2t}\left(\text{συν}2t + i\text{ημ}2t\right) + 5c_2 e^{-2t}\left(\text{συν}2t - i\text{ημ}2t\right) \\ x_{2o}(t, c_1, c_2) &= (4-2i)c_1 e^{-2t}\left(\text{συν}2t + i\text{ημ}2t\right) + (4+2i)c_2 e^{-2t}\left(\text{συν}2t - i\text{ημ}2t\right) \end{aligned}$$

ή μετά από πράξεις, χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος:

$$\begin{aligned} x_{1o}(t, c_1, c_2) &= \left[5\left(c_1 + c_2\right)e^{-2t}\text{συν}2t\right] \; - \; i \; \left[5\left(c_2 - c_1\right)e^{-2t}\text{ημ}2t\right] \\ x_{2o}(t, c_1, c_2) &= \left[4(c_1 + c_2)e^{-2t}\text{συν}2t + 2(c_1 + c_2)e^{-2t}\text{ημ}2t\right] \; + \\ &\quad + i \; \left[-2\left(c_2 - c_1\right)e^{-2t}\text{συν}2t - 4\left(c_2 - c_1\right)e^{-2t}\text{ημ}2t\right] \end{aligned}$$

Τέλος, θέτοντας τις σταθερές: $A = c_1 + c_2$ και $B = i(c_2 - c_1)$ έχουμε την γενική λύση:

$$\begin{aligned} x_{1o}(t, A, B) &= 5Ae^{-2t}\text{συν}2t \; - 5Be^{-2t}\text{ημ}2t \\ x_{2o}(t, A, B) &= 2Ae^{-2t}\left(2\text{συν}2t + \text{ημ}2t\right) \; - 2Be^{-2t}\left(\text{συν}2t + 2\text{ημ}2t\right) \end{aligned}$$

β) Υπολογισμός μιας μερικής λύσης του (Σ.5)

Αναζητούμε μερική λύση μιας μορφής αντίστοιχης της συνάρτησης που υπάρχει στο β' μέλος της πρώτης δ.ε. του συστήματος:

$$\begin{aligned} x_{1\mu} &= \alpha_1 \sigma\upsilon\nu t + \beta_1 \eta\mu t \\ x_{2\mu} &= \alpha_2 \sigma\upsilon\nu t + \beta_2 \eta\mu t \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό των δύο μερικών λύσεων, και των παραγώγων τους, το αντικαθιστούμε στο αρχικό σύστημα (Σ.5), έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις τιμές των σταθερών α_j και β_j.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\mu} &= -\alpha_1 \eta\mu t + \beta_1 \sigma\upsilon\nu t \\ \dot{x}_{2\mu} &= -\alpha_2 \eta\mu t + \beta_2 \sigma\upsilon\nu t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\alpha_1 \eta\mu t + \beta_1 \sigma\upsilon\nu t &= 2(\alpha_1 \sigma\upsilon\nu t + \beta_1 \eta\mu t) - 5(\alpha_2 \sigma\upsilon\nu t + \beta_2 \eta\mu t) + 2\eta\mu t \\ -\alpha_2 \eta\mu t + \beta_2 \sigma\upsilon\nu t &= 4(\alpha_1 \sigma\upsilon\nu t + \beta_1 \eta\mu t) - 6(\alpha_2 \sigma\upsilon\nu t + \beta_2 \eta\mu t) \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} (-\alpha_1 - 2\beta_1 + 5\beta_2)\eta\mu t + (\beta_1 - 2\alpha_1 + 5\alpha_2)\sigma\upsilon\nu t &= 2\eta\mu t \\ (-\alpha_2 - 4\beta_1 + 6\beta_2)\eta\mu t + (\beta_2 - 4\alpha_1 + 6\alpha_2)\sigma\upsilon\nu t &= 0 \end{aligned}$$

απ' όπου καταλήγουμε στο σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\beta_1 + 5\beta_2 &= 2 \\ -2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \beta_1 + 0\beta_2 &= 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 - 4\beta_1 + 6\beta_2 &= 0 \\ -4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 0\beta_1 + \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Για να λύσουμε το σύστημα αντιστρέφουμε τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων και έχουμε:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -0{,}261538462 & 0{,}707692308 & 0{,}307692308 & -0{,}538461538 \\ -0{,}246153846 & 0{,}430769231 & 0{,}230769231 & -0{,}153846154 \\ 0{,}707692308 & 0{,}261538462 & -0{,}538461538 & -0{,}307692308 \\ 0{,}430769231 & 0{,}246153846 & -0{,}153846154 & -0{,}230769231 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}523076923 \\ -0{,}492307692 \\ 1{,}415384615 \\ 0{,}861538462 \end{bmatrix}$$

και η ζητούμενη μερική λύση:

$$x_{1\mu}(t) = -0,523\sigma\upsilon\nu t - 0,492\eta\mu t$$
$$x_{2\mu}(t) = 1,415\sigma\upsilon\nu t + 0,862\eta\mu t$$

γ) Η γενική λύση του πλήρους συστήματος:

Η γενική λύση του δοσμένου συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της μερικής λύσης που μόλις υπολογίσαμε με την γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος:

$$x_1(t,A,B) = x_{1o}(t,A,B) + x_{1\mu}(t) = 5Ae^{-2t}\sigma\upsilon\nu 2t - 5Be^{-2t}\eta\mu 2t - 0,523\sigma\upsilon\nu t - 0,492\eta\mu t$$
$$x_2(t,A,B) = x_{2o}(t,A,B) + x_{2\mu}(t) = 2Ae^{-2t}\left(2\sigma\upsilon\nu 2t + \eta\mu 2t\right) - 2Be^{-2t}\left(\sigma\upsilon\nu 2t + 2\eta\mu 2t\right)$$
$$+1,415\sigma\upsilon\nu t + 0,862\eta\mu t$$

δ) Η μερική λύση του πλήρους συστήματος,

η οποία αντιστοιχεί στις δοσμένες αρχικές συνθήκες: Αντικαθιστούμε τις (μηδενικές) αρχικές συνθήκες στην γενική λύση και έχουμε:

$$0 = 5A - 0,523$$
$$0 = 4A - 2B + 1,415$$

απ' όπου υπολογίζουμε:

$$A = \frac{0,523}{5} = 0.1046$$
$$B = \frac{1.8334}{2} = 0.9167$$

οπότε η μερική λύση γράφεται:

$$x_1(t) = 0.523e^{-2t}\sigma\upsilon\nu 2t - 4.5835e^{-2t}\eta\mu 2t - 0,523\sigma\upsilon\nu t - 0,492\eta\mu t$$
$$x_2(t) = 0.2092e^{-2t}\left(2\sigma\upsilon\nu 2t + \eta\mu 2t\right) - 1.8334e^{-2t}\left(\sigma\upsilon\nu 2t + 2\eta\mu 2t\right)$$
$$+1,415\sigma\upsilon\nu t + 0,862\eta\mu t$$

ε) Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$: