ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

2.2.7 Συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο

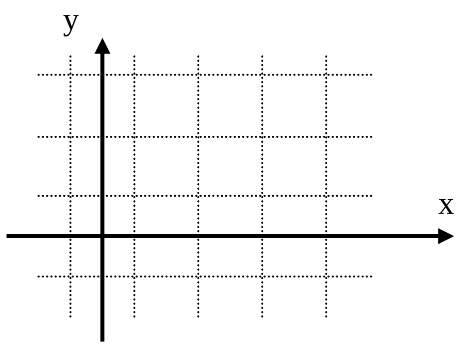
Ένα σύστημα συντεταγμένων επιτρέπει τον καθορισμό της θέσης των σημείων ενός χώρου. Το πλήθος των παραμέτρων που απαιτούνται για τον καθορισμό αυτό, είναι απόλυτα συγκεκριμένος για κάθε χώρο, και αποτελεί τη διάσταση του χώρου.

Είναι γνωστό πως μία καμπύλη είναι μονοδιάστατη. Ειδικότερα μία ευθεία διαθέτει σύστημα συντεταγμένων όταν ορισθεί επάνω της το σημείο 0, το μοναδιαίο μήκος και η θετική φορά.

Εξ ίσου γνωστό είναι πως οποιαδήποτε επιφάνεια έχει δύο διαστάσεις, και πως είναι αναγκαίες δύο συντεταγμένες για τον καθορισμό της θέσης ενός σημείου της επιφανείας. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι οι συντεταγμένες που επιτρέπουν τον καθορισμό της θέσης πάνω στην επιφάνεια της Γης: το Γεωγραφικό μήκος και πλάτος.

Στη συνέχεια θα αναφερθούν δύο συστήματα συντεταγμένων ενός επιπέδου: Το πολύ γνωστό Καρτεσιανό σύστημα και το σύστημα των Πολικών συντεταγμένων.

(i) Το Καρτεσιανό σύστημα:



Η βάση του Καρτεσιανού συστήματος είναι οι δύο γνωστοί (προσανατολισμένοι) άξονες των x και των y.

Ουσιαστικά το σύστημα αυτό καλύπτει το επίπεδο με έναν κάναβο ευθειών παράλληλων με τους δύο άξονες. Από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται ακριβώς δύο τέτοιες ευθείες, οι οποίες υποδεικνύουν τις δύο συντεταγμένες. Συχνά αποκαλούμε τις ευθείες αυτές **συντεταγμένες γραμμές.** Η εξίσωση των συντεταγμένων γραμμών προκύπτει από την εξίσωση της κάθε συντεταγμένης με μια αυθαίρετη σταθερή (c):

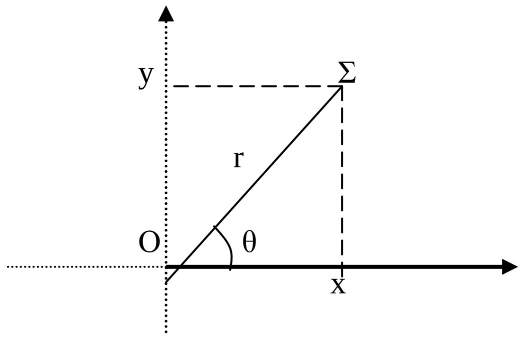
x = c η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες του άξονα των y.
y = c η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες του άξονα των x.

Η εξίσωση x=c δίνει μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των y που τέμνει τον άξονα των x στο σημείο c. Πράγματι η ευθεία αυτή είναι ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία, ανεξαρτήτως της τιμής της συντεταγμένης y, έχουν την x ίση με το c.

Όμοια, η εξίσωση y=c αντιστοιχεί σε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των x. Σ’ αυτήν ανήκουν τα σημεία που έχουν οποιοδήποτε x, αλλά το y τους είναι ίσο με το c. Έτσι λοιπόν ο κάναβος αυτός αποτελείται από δύο δέσμες (οικογένειες) παραλλήλων ευθειών οι οποίες μεταξύ τους τέμνονται κάθετα.

(ii) Πολικές συντεταγμένες.

Στις πολικές συντεταγμένες υπάρχει ένας ημιάξονας Οx, στον οποίο ορίζεται η μονάδα μήκους. Η θέση του κάθε σημείου Σ του επιπέδου ορίζεται από την απόστασή του (r) από την αρχή O και από τη γωνία (θ), που δημιουργείται από τον ημιάξονα Οx και την επιβατική ακτίνα ΟΣ.



Ένα σημαντικό πρόβλημα που ανακύπτει είναι να υπολογίσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου Σ, όταν γνωρίζουμε τις πολικές, και αντίστροφα, τις πολικές συντεταγμένες του Σ, όταν γνωρίζουμε τις Καρτεσιανές.

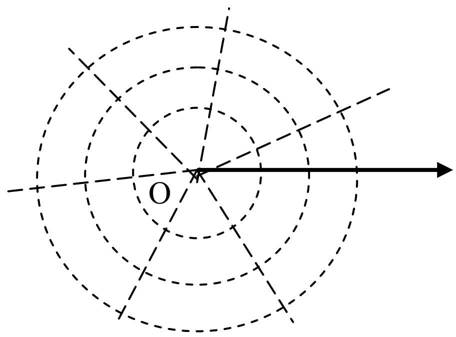
Θεωρούμε γνωστές τις πολικές συντεταγμένες (r,θ), ενός σημείου Σ. Οι αντίστοιχες Καρτεσιανές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (με δεδομένο πως το σημείο τομής (Ο) των αξόνων ταυτίζεται με το Ο του ημιάξονα των πολικών, ενώ ο ημιάξονας των πολικών ταυτίζεται με το θετικό τμήμα του άξονα των x)

$$x = r\text{συν}\theta \quad \text{και} \quad y = r\text{ημ}\theta$$

Αντίστροφα, οι σχέσεις που δίνουν τις πολικές όταν γνωρίζουμε τις Καρτεσιανές είναι οι:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \begin{array}{ll} \theta = \text{τοξεφ}(y/x) & \text{εάν } x>0 \\ \theta = \text{τοξεφ}(y/x) + \pi & \text{εάν } x<0 \\ \theta = \pi/2 & \text{εάν } x=0 \text{ και } y>0 \end{array}$$

Η απόσταση r ενός σημείου Σ είναι πάντα θετική, ενώ η γωνία θ παίρνει τιμές από 0 έως 2π. Οι συντεταγμένες γραμμές του συστήματος αυτού προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο που προέκυψαν και στο Καρτεσιανό. Δηλαδή εξισώνοντας με μία σταθερή την κάθε συντεταγμένη (και θεωρώντας πως η άλλη μεταβάλλεται):



$$\mathbf{r = c}$$

που δημιουργεί ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το Ο και ακτίνα το c (διότι η απόσταση παραμένει σταθερή ενώ η γωνία θ μεταβάλλεται). Αντίστοιχα η εξίσωση

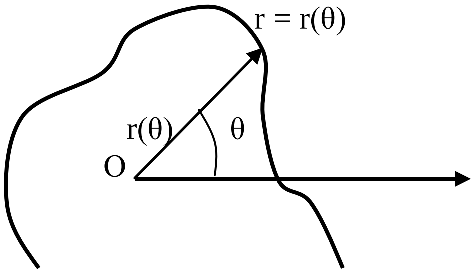
$$\mathbf{\theta = c}$$

αντιστοιχεί σε δέσμη ημιευθειών με κέντρο το Ο.

Η συνηθισμένη μορφή των συναρτήσεων στις πολικές συντεταγμένες είναι η:

$$r = r(\theta)$$

και οι γραφικές τους παραστάσεις μοιάζουν στη διπλανή.

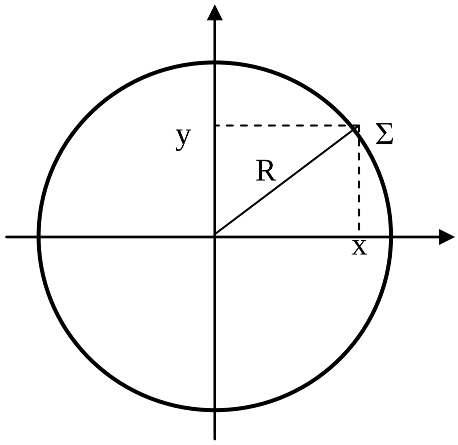


Παραδείγματα συναρτήσεων:

1^{o}) Η εξίσωση του κύκλου. Ως γνωστόν στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση του κύκλου ακτίνας R είναι η:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$$

εκφράζοντας τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες x και y και προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους μετατροπής:



$$\mathbf{x = r\sigma\upsilon\nu\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\eta\mu\theta}$$

υπολογίζουμε την ακόμη γνωστότερη σχέση r = R.

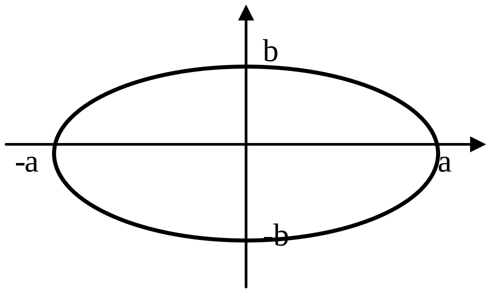
$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2 \ \Rightarrow\ r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2\eta\mu^2\theta = R^2 \ \Rightarrow\ r^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = R^2 \ \Rightarrow}$$

$$\mathbf{r = r(\theta) = R}$$

Φτάνουμε δηλαδή στο συμπέρασμα πως στις πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το O (την αρχή του ημιάξονα των πολικών συντεταγμένων) είναι η σταθερή συνάρτηση: r = c. Είναι κάτι που θα έπρεπε να το περιμένουμε, μια και αυτού του είδους οι κύκλοι αποτελούν συντεταγμένες γραμμές για τις πολικές (ακριβώς παρόμοιες με τις ευθείες της μορφής y=c, που είναι οι αντίστοιχες συντεταγμένες γραμμές στο Καρτεσιανό σύστημα)

2^{o}) Η εξίσωση της έλλειψης. Η εξίσωση της έλλειψης με οριζόντιο ημιάξονα τον a και κατακόρυφο τον b, στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Όπως και προηγουμένως βρίσκουμε:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\eta\mu^2\theta}{b^2}=1 \Rightarrow r^2\left[\frac{b^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+a^2\eta\mu^2\theta}{a^2b^2}\right]=1 \Rightarrow$$

$$r=\frac{ab}{\sqrt{b^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+a^2\eta\mu^2\theta}}$$

3^o) Θα μεταφέρουμε στη συνέχεια σε πολικές συντεταγμένες την εξίσωση της ευθείας: y = αx + β. Χρησιμοποιώντας και πάλι τους τύπους του μετασχηματισμού, έχουμε:

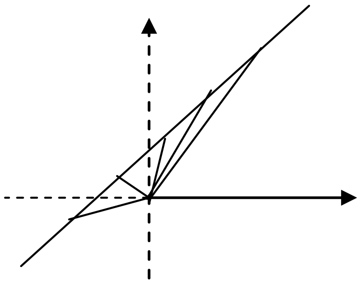
$$r\eta\mu\theta = \alpha r\sigma\upsilon\nu\theta + \beta \quad \Longrightarrow \quad r = r(\theta) = \frac{\beta}{\eta\mu\theta - \alpha\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Διερεύνηση: Με δεδομένη τη σχέση $r \geq 0$, έχουμε πως εάν δεχθούμε πως α>0 και β>0 (δηλαδή πως πρόκειται για μία αύξουσα ευθεία που τέμνει τον άξονα των y στο θετικό του τμήμα), τότε η συνάρτηση αυτή έχει νόημα μόνον όταν ο παρονομαστής είναι θετικός. Όταν δηλαδή ισχύει:

$$\eta\mu\theta - \alpha\sigma\upsilon\nu\theta > 0^{(1)} \;\Bigg|\; \Longrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi\theta > \alpha & \text{όταν } \sigma\upsilon\nu\theta>0 \ (\text{στο } 1^o \text{ και } 4^o \text{ τεταρτημόριο}) \\ \varepsilon\varphi\theta < \alpha & \text{όταν } \sigma\upsilon\nu\theta<0 \ (\text{στο } 2^o \text{ και } 3^o \text{ τεταρτημόριο}) \end{cases}$$

πράγμα το οποίο σημαίνει πως ισχύει για γωνίες (θ) οι οποίες ξεκινούν από γωνία που αντιστοιχεί στην κλίση της ευθείας ε (κλίση = α).

Παρατηρούμε λοιπόν πως κάποιες καμπύλες που έχουν απλή και βολική έκφραση στις Καρτεσιανές συντεταγμένες, αποδίδονται σε πολικές με τρόπο αρκετά περίπλοκο, πράγμα που σημαίνει πως κάθε φορά επιλέγουμε να δουλέψουμε στο πιο βολικό σύστημα.

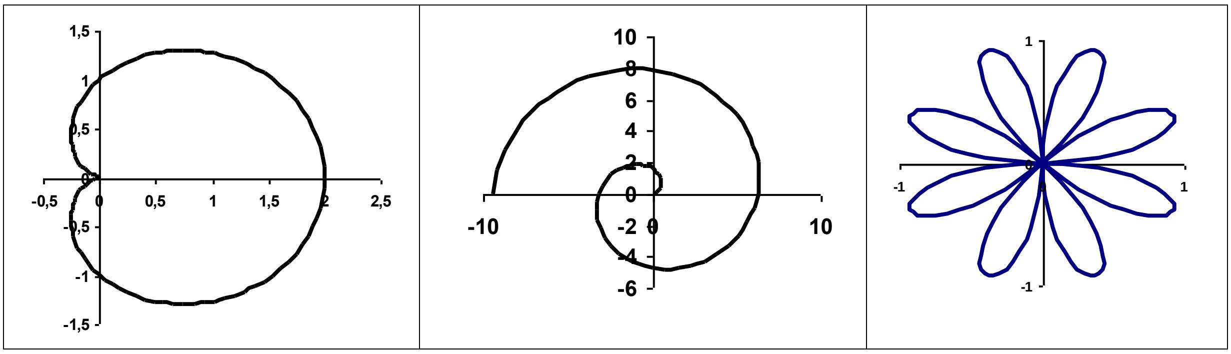


Σαν άσκηση ας υπολογισθεί η έκφραση σε πολικές της παραβολής $y=x^2-1$ και βεβαιωθείτε πως η σχέση αυτή λειτουργεί για κάθε γωνία πλην της θ=π/2.

Αντίθετα, υπάρχουν ιδιαίτερα περίπλοκες καμπύλες με πολύ απλή έκφραση στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων. Σαν παράδειγμα να αναφέρουμε::

- το καρδιοειδές με εξίσωση: r(θ) = α(1+συνθ)
- η σπείρα του Αρχιμήδη με εξίσωση: r(θ) = αθ
- η οκτάφυλλη μαργαρίτα, με εξίσωση: r(θ) = ασυν(4θ)

[1] *Να θυμηθούμε πως όταν πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό, τότε η ανισότητα αλλάζει πρόσημο…*

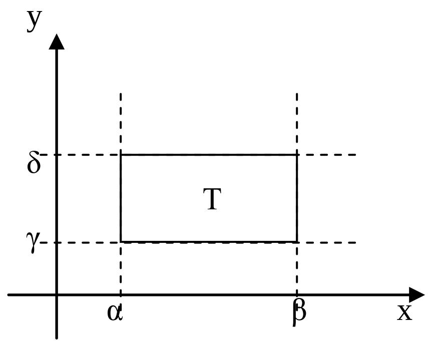


Σχ. Β.2.7. Το καρδιοειδές, η σπείρα του Αρχιμήδη και η μαργαρίτα για α=1.

2.2.7 Το διπλό ολοκλήρωμα σε τόπο που ορίζεται από συντεταγμένες γραμμές

Έστω πως ο τόπος ολοκλήρωσης είναι το παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος, αποτελούμενο από τις ευθείες:

$$x = \alpha \,,\; x = \beta \,,\; y = \gamma \,,\; y = \delta$$

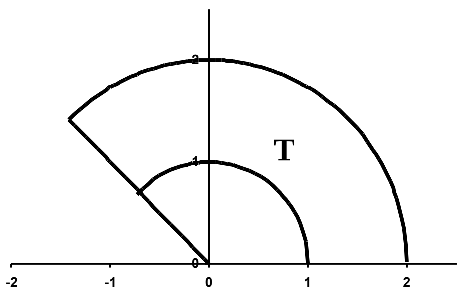


$$I = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right] dx$$

Παρατηρούμε πως όταν ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται με συντεταγμένες γραμμές, τότε και τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι σταθεροί αριθμοί, πράγμα που συνήθως απλοποιεί ιδιαίτερα τον υπολογισμό του. Για το λόγο αυτό συχνά φροντίζουμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών (ουσιαστικά αλλαγή συστήματος συντεταγμένων), έτσι ώστε στο νέο σύστημα ο δοσμένος τόπος να ορίζεται από συντεταγμένες γραμμές.

Στις πολικές συντεταγμένες για παράδειγμα διευκολύνεται πολύ η λύση του ολοκληρώματος (όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο), όταν ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται από ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το Ο και ημιευθείες που ξεκινούν από το Ο. Ένας τέτοιος τόπος είναι αυτός του διπλανού σχήματος που ορίζεται από τους κύκλους



$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 2^2$$

και τις ευθείες

$$y = 0 \quad \text{και} \quad y = -x$$

Μεταφέροντας τις εξισώσεις αυτές σε πολικές συνταγμένες, έχουμε:

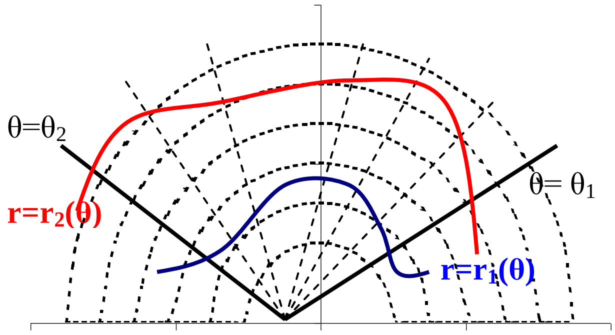
τους κύκλους $r = 1$ και $r = 2$
και τις ημιευθείες $\theta = 0$ και $\theta = 3\pi/4$

2.2.7 Το διπλό ολοκλήρωμα στις πολικές συντεταγμένες

Οι πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για να απλοποιήσουν τη λύση κάποιων διπλών ολοκληρωμάτων. Τέτοια ολοκληρώματα είναι συχνά αυτά που ολοκληρώνουν συναρτήσεις της μορφής: $f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

Ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται από τις συναρτήσεις:

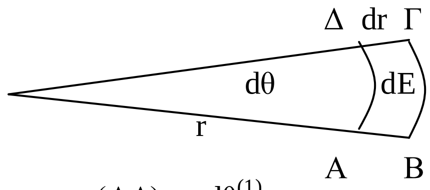
- $r = r_1(\theta)$ στα μικρά r
- $r = r_2(\theta)$ στα μεγάλα r
- από τη γωνία θ_1 έως τη γωνία θ_2, **εκφρασμένες σε ακτίνια**.



Σχ. 2.2.8. Ο τόπος ολοκλήρωσης, και η ανάλυσή του σε στοιχειώδεις υποτόπους.

Ο τόπος ολοκλήρωσης Τ τεμαχίζεται σε στοιχειώδεις τόπους με τη βοήθεια συντεταγμένων γραμμών των πολικών συντεταγμένων (σε στοιχειώδη τμήματα κυκλικών δακτυλίων). Θα πρέπει στη συνέχεια να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κάθε στοιχειώδη τόπου, έτσι ώστε να αντικατασταθεί η έκφραση του στοιχειώδους εμβαδού (dE=dxdy) των Καρτεσιανών συντεταγμένων.

Δεχόμενοι πως η γωνία dθ είναι πολύ μικρή κι εκφράζεται σε ακτίνια (rad), μπορούμε να θεωρήσουμε πως το στοιχειώδες εμβαδόν είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (το ΑΒΓΔ) του οποίου το εμβαδόν ισούται με:



dE = (AB)(AΔ) όπου όμως (AB) = dr και (AΔ) = rdθ[1]

άρα έχουμε:

Το ότι (ΑΔ) = rdθ μπορεί να δειχθεί με δύο τρόπους:

(α) Από τον ορισμό του ακτινίου (1 ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία που «βλέπει» σε τόξο μήκους μιας ακτίνας), οπότε το μήκος ενός τόξου s(θ) που αντιστοιχεί σε μία επίκεντρη γωνία θ (rad) ισούται με: ***s(θ) = rθ*** *, όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου.*

(β) Από την απλή μέθοδο των τριών:

Σε γωνία ***2π*** *(rad) αντιστοιχεί μήκος περιφέρειας* ***s(2π) = 2πr***
Σε γωνία ***θ*** *(rad) αντιστοιχεί μήκος περιφέρειας* ***s(θ) = ;***
s(θ) = 2πrθ/2π = rθ

$$\boxed{\mathbf{dxdy = dE = rdrd\theta}}$$

Στη συνέχεια εκφράζεται η συνάρτηση που ολοκληρώνεται, σαν συνάρτηση των μεταβλητών r και θ, σύμφωνα με τους τύπους μετατροπής:

$$\text{Από } z = f(x,y) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= r\sigma\upsilon\nu\theta \\ y &= \end{aligned}} \longrightarrow \text{σε } z = g(r,\theta)$$

Διατηρώντας την ίδια λογική λύσης μ' αυτήν που ακολουθήσαμε στις Καρτεσιανές συντεταγμένες υπολογίζουμε:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_T g(r,\theta)rdrd\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} g(r,\theta)rdr\right]d\theta$$

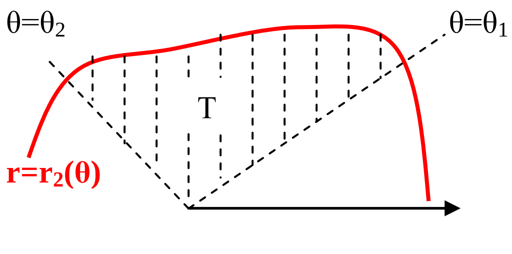
όπου οι συναρτήσεις $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ και οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι αυτές που καθορίζουν τον τόπο ολοκλήρωσης (Τ), όπως φαίνεται στο σχ. Β.2.8.

Παρατηρήσεις: Οι παρακάτω παρατηρήσεις για τον τύπο της ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες αποτελούν επανάληψη των παρατηρήσεων που αφορούσαν στον τύπο της ολοκλήρωσης σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, της παραγράφου Β.2.3.

1. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα αναγνωρίζει μόνο το r σαν μεταβλητή (και αντιμετωπίζει το θ σαν μία σταθερά). Ολοκληρώνοντας ως προς r, και θέτοντας τα δύο όρια που είναι συναρτήσεις του θ, φθάνουμε σε μία συνάρτηση που περιέχει μόνον θ. Όμως το θ αναγνωρίζεται σαν μεταβλητή από το εξωτερικό ολοκλήρωμα. Ολοκληρώνοντας για δεύτερη φορά ως προς θ και θέτοντας τα όρια θ_1 και θ_2 (πάντα σε rad), υπολογίζουμε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος.

2. Τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι εν γένει συναρτήσεις του θ. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο (Β.2.8) δεν είναι συναρτήσεις του θ, αλλά σταθερές τιμές όταν ο τόπος ορίζεται με τη βοήθεια συντεταγμένων γραμμών των πολικών συντεταγμένων.

3. Εάν η συνάρτηση $r = r_1(\theta)$, αυτή δηλαδή που αντιστοιχεί στις μικρότερες τιμές της συνάρτησης r, δεν υπάρχει, τότε το κάτω όριο του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι το μηδέν, μια και ο τόπος ολοκλήρωσης (ο Τ), ορίζεται από το κάτω μέρος (στα μικρά r) από το σημείο Ο, δηλαδή από τη συνάρτηση r=0.



2.2.7 Γενίκευση της αλλαγής μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα

Η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων (και η αλλαγή μεταβλητών σε ένα διπλό ολοκλήρωμα που αυτή επιφέρει), αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών. Με τον όρο, αλλαγή συστήματος συντεταγμένων, εννοούμε το να ορίσουμε δύο συναρτήσεις της μορφής:

$$\mathbf{u = f_u(x,y) \quad και \quad v = f_v(x,y)}$$

οι οποίες να αντιστοιχούν σε κάθε δυάδα συντεταγμένων ενός σημείου (x,y) μια άλλη δυάδα τιμών (u,v), που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις (τους τύπους μετασχηματισμού). Βέβαια απαιτούνται οι επόμενες προϋποθέσεις:

- ❖ Οι συναρτήσεις αυτές να ορίζουν μονοσήμαντα τις τιμές u και v (δηλαδή για κάθε δυάδα (x,y) να ορίζεται από τις συναρτήσεις f_u και f_v ακριβώς μία δυάδα (u,v)).
- ❖ Αντίστοιχα οι δύο αυτές σχέσεις, θεωρούμενες σαν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, πρέπει να επιλύονται ως προς x και y, οδηγώντας στις σχέσεις:

  $$\mathbf{x = f_x(u,v) \quad και \quad y = f_y(u,v)}$$

  οι οποίες να ορίζουν μονοσήμαντα τις τιμές x και y, όταν δίνονται τα u και v.

Αποδεικνύεται πως τα παραπάνω συμβαίνουν όταν η διπλανή ορίζουσα (J), που καλείται Ιακωβιανή, είναι διάφορη του μηδενός.

$$J \neq 0$$

$$J = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_y(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Για να αντιληφθούμε τη μορφή των συντεταγμένων γραμμών του συστήματος (u,v), στην οικεία μας πραγματικότητα του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, θέτουμε στις γνωστές μας εξισώσεις:

$$u = c \quad και \quad v = c$$

τις εξισώσεις που δίνουν τις παραμέτρους αυτές, συναρτήσει των x και y:

$$\mathbf{f_u(x,y) = c \quad και \quad f_v(x,y) = c}$$

καταλήγοντας σε δύο οικογένειες καμπύλων με μία παράμετρο (μονοπαραμετρικές οικογένειες καμπύλων)(1) , οι οποίες καθορίζουν τις συντεταγμένες γραμμές του νέου συστήματος στο Καρτεσιανό επίπεδο (κάθε τιμή του c καθορίζει και μια νέα συντεταγμένη γραμμή).

---

[1] *Να θυμίσουμε πως εξισώσεις της μορφής f(x,y)=c ορίζουν με τρόπο πεπλεγμένο μια συνάρτηση y με μεταβλητή το x και παράμετρο το c. Πράγματι, εάν επιλύσουμε ως προς y τη ισότητα: f(x,y)=c έχουμε: y=φ(x,c)*

Παράδειγμα 1ο: Ας εξετάσουμε αρχικά έναν απλό μετασχηματισμό που καλείται γραμμικός. Δίνεται από τις σχέσεις:

$$u = f_u(x,y) = \alpha x + \beta y$$
$$v = f_v(x,y) = \gamma x + \delta y$$

του οποίου η αντίστροφη μορφή είναι παρόμοια[1]:

$$x = f_x(u,v) = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}u - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}v = \kappa u + \lambda v$$
$$y = f_y(u,v) = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}u - \frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}v = \sigma u + \tau v$$

των οποίων η Ιακωβιανή:

$$J = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_y(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ \alpha & -\gamma \end{bmatrix} = \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \ldots \eta \ldots = \kappa\tau - \lambda\sigma$$

η οποία για να είναι διάφορη του μηδενός θα πρέπει $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$, ενώ για να ορίζεται θα πρέπει $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, όπου το αριστερό μέλος είναι η Ιακωβιανή του αντίστροφου μετασχηματισμού. Πράγματι

$$J(u,v) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_u(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_u(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_v(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_v(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Προσπαθώντας να καθορίσουμε τις συντεταγμένες γραμμές του νέου συστήματος, στο καρτεσιανό επίπεδο, μελετούμε τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} u = c \\ v = c \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = c \\ \gamma x + \delta y = c \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x + \dfrac{c}{\beta} \\ y = -\dfrac{\gamma}{\delta}x + \dfrac{c}{\delta} \end{array}$$

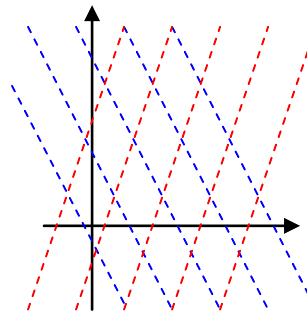
---

(1) *Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα 2x2, που τι λύνουμε είτε με αντικατάσταση, είτε με την μέθοδο του Crammer: Σ' αυτή τη δεύτερη περίπτωση ορίζουμε τις ορίζουσες των πινάκων:*

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \;,\; \Delta_x = \det\begin{bmatrix} u & \beta \\ v & \delta \end{bmatrix} = \delta u - \beta v \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \Delta_y = \det\begin{bmatrix} \alpha & u \\ \gamma & v \end{bmatrix} = -\gamma u + \alpha v$$

οπότε x=Δx/Δ y=Δy/Δ.

Παρατηρούμε πως οι συντεταγμένες γραμμές του συστήματος u,v στο Καρτεσιανό είναι δύο δέσμες παραλλήλων ευθειών με κλίσεις λ_1=-α/β και λ_2=–γ/δ αντίστοιχα (οι κόκκινες και οι μπλε ευθείες του διπλανού γραφήματος).



Να παρατηρήσουμε επίσης πως εάν ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1\lambda_2 = -1$$

τότε οι δύο αυτές δέσμες παραλλήλων ευθειών τέμνονται κάθετα μεταξύ τους(1). Αντίθετα, στη γενική περίπτωση (όπως σ' αυτή του διπλανού σχήματος) η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στις ευθείες των δύο οικογενειών δεν είναι ορθή.

Έκφραση του στοιχειώδους εμβαδού dE=dxdy

Όταν λοιπόν σε ένα διπλό ολοκλήρωμα μεταφερόμαστε, μέσω του μετασχηματισμού των μεταβλητών, σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, τότε έχουμε έναν ανάλογο μετασχηματισμό της έκφρασης του στοιχειώδους εμβαδού dE = dxdy. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται πως εάν μεταφερόμαστε από το Καρτεσιανό σύστημα, σε ένα σύστημα συντεταγμένων με μεταβλητές τις u και v, οι οποίες συνδέονται με τα x και y μέσω των σχέσεων μετασχηματισμού:

$$\mathbf{x = f_x(u,v) \quad και \quad y = f_y(u,v)}$$

τότε το στοιχειώδες εμβαδόν εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$dE = Jdudv$$

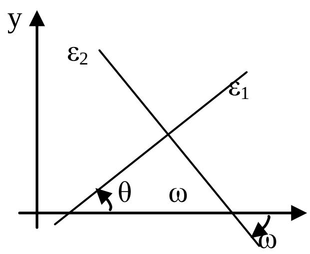
όπου J είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J(x(u,v),y(u,v)) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_y(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

---

(1) *Αρχικά να θυμίσουμε πως για δύο γωνίες συμπληρωματικές (έστω ω και θ) ισχύει η σχέση: εφω = σφθ = 1/εφθ. Και επειδή στο διπλανό σχήμα η κλίση της ευθείας ε_2 (που είναι κάθετη στην ε_1) ισούται με την εφ(-ω) (η ε_2 είναι φθίνουσα), ισχύει η σχέση:*

$$\lambda_1\lambda_2 = εφθεφ(-ω) = -εφθεφω = -εφθ(1/εφθ) = -1$$



Εφαρμόζοντας λοιπόν τον προηγούμενο τύπο στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων έχουμε:

$$J(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(r\sigma\upsilon\nu\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\eta\mu\theta)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(r\sigma\upsilon\nu\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(r\eta\mu\theta)}{\partial\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ -r\eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix} = r\sigma\upsilon\nu^2\theta + r\eta\mu^2\theta = r$$

και με τον τρόπο αυτό φθάνουμε στη γνωστή σχέση:

dE = rdrdθ

2.2.7 Παραδείγματα

1°) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

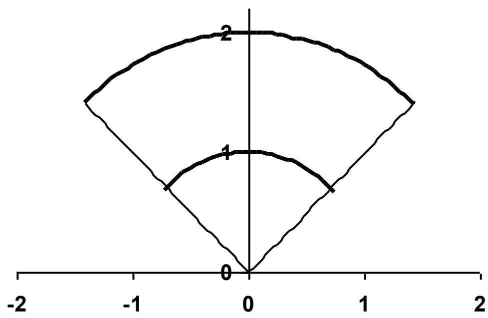
$$I = \iint_T \eta\mu(x^2 + y^2)dxdy$$

όπου ο τόπος ολοκλήρωσης είναι το τμήμα κυκλικού δακτυλίου, που ορίζεται από τους κύκλους:

$x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 2^2$

και τις ευθείες:

y = -x και y = x



Λύση: Και η μορφή του τόπου και η συνάρτηση που ολοκληρώνεται οδηγούν στη χρήση των πολικών συντεταγμένων. Έτσι μετατρέπουμε:

- Τη συνάρτηση που ολοκληρώνεται

  από z = ημ(x,y) σε $z = \eta\mu(r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2\eta\mu^2\theta) = \eta\mu(r^2)$

Τις εξισώσεις που ορίζουν τον τόπο T.

από	$x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + y^2 = 2^2$ x=-y και x=y	σε	r = 1 r = 2 θ = π/4 και θ = 3π/4

- ενώ, τέλος αντικαθιστούμε το dxdy με το rdrdθ.

Έχουμε λοιπόν για το ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_T \eta\mu(x^2 + y^2)dxdy = \iint_T \eta\mu(r^2)rdrd\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\int_1^2 \eta\mu(r^2)rdr\right]d\theta =$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\int_1^2 \eta\mu(r^2)d(r^2/2)\right]d\theta=-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\sigma\upsilon\nu(r^2)\right]_1^2 d\theta=$$

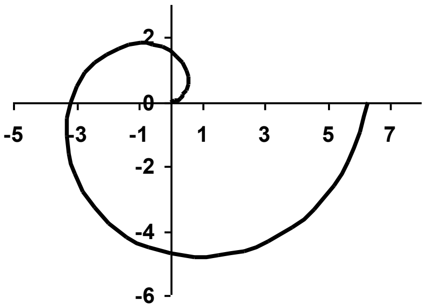
$$=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\int_{\pi/4}^{3\pi/4}d\theta=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\left[\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\left[\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\pi}{4}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]=0{,}937723$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα αυτό δεν θα μπορούσαμε να το λύσουμε αν δεν το μεταφέραμε σε πολικές συντεταγμένες. Αν θέλετε δοκιμάστε να το επιλύσετε σε Καρτεσιανές …

2°) Να υπολογισθεί το εμβαδόν της σπείρας του Αρχιμήδη για ένα πλήρη κύκλο (όπως στη διπλανή γραφική παράσταση), όταν γνωρίζουμε πως η εξίσωση της σπείρας σε πολικές συντεταγμένες είναι η:

$$r = r(\theta) = \alpha\theta \quad [\alpha \in R]$$



Λύση: Όπως αναφέρθηκε στη γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος, αλλά και στο 2° παράδειγμα της παραγράφου Β.2.6, το ολοκλήρωμα:

$$I=\iint_T 1dxdy$$

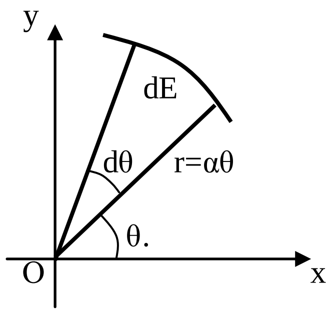
ισούται με το εμβαδόν του τόπου Τ. Εάν λοιπόν επιλέξουμε σαν τόπο τη σπείρα του Αρχιμήδη, θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της. Έχουμε:

$$E_{\sigma\pi\varepsilon\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}=\iint_T 1rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\alpha\theta} rdr\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[r^2\right]_0^{\alpha\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\alpha^2\theta^2 d\theta=$$

$$=\frac{\alpha^2}{6}\left[\theta^3\right]_0^{2\pi}=\frac{4\alpha^3\pi^3}{3}$$

Παρατήρηση: Αξίζει στο σημείο αυτό να ξαναθυμηθούμε τα απλά ορισμένα ολοκληρώματα και να υπολογίσουμε το πιο πάνω εμβαδόν με τη βοήθειά τους. Για να καταστρώσουμε το ολοκλήρωμα που επιλύει ένα πρόβλημα, θα πρέπει να ορίσουμε το άθροισμα που δίνει τη λύση του προβλήματος. Στο πρόβλημα της σπείρας έχουμε:

Έστω 2 σημεία πάνω στην καμπύλη της σπείρας. Το πρώτο αντιστοιχεί σε γωνία θ και το δεύτερο σε γωνία θ+dθ. Επειδή η γωνία dθ είναι πάρα πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε πως το εμβαδόν που ορίζεται από την καμπύλη της σπείρας και τις δύο επιβατικές ακτίνες, είναι ένας κυκλικός τομέας, ακτίνας r=αθ. Με τον τρόπο αυτό το στοιχειώδες εμβαδόν dE δίνεται από τη σχέση:



$$dE = \pi r^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{r^2}{2} d\theta = \frac{\alpha^2\theta^2}{2} d\theta$$

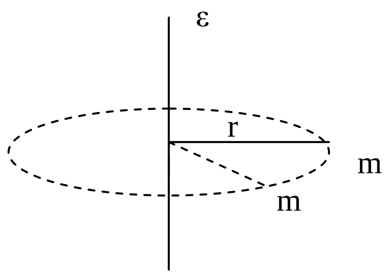
οπότε:

$$E = \int_0^{2\pi} dE = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2\theta^2}{2} d\theta = \frac{\alpha^2}{6}\left[\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{4\alpha^2\pi^3}{3}$$

2.2.7 Ροπή αδρανείας

Ένα υλικό σημείο μάζας m περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα ε.

Η ροπή αδρανείας (Ι) του υλικού σημείου είναι το φυσικό μέγεθος που αποδίδει την αντίσταση του σημείου, λόγω αδρανείας, σε κάθε επιτάχυνση ή επιβράδυνση της κυκλικής του κίνησης. Στην περίπτωση αυτή, η ροπή αδρανείας ισούται με το γινόμενο της μάζας (m) του σημείου επί το τετράγωνο της απόστασής του (r) από τον άξονα ε.

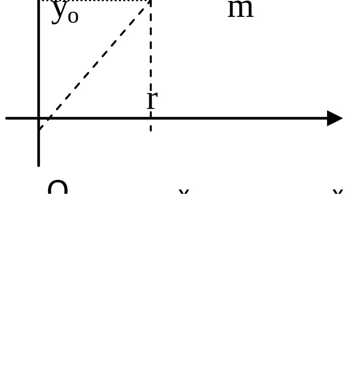


$$\boxed{\mathbf{I = mr^2}}$$

Όμοια, η ροπή αδρανείας ενός υλικού σημείου με μάζα m, ως προς ένα σημείο O, που βρίσκεται σε απόσταση r, ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί το τετράγωνο της απόστασής του από το εν λόγω σημείο. Ισχύει δηλαδή και πάλι ο προηγούμενος τύπος: $I = mr^2$.

Έστω το υλικό σημείο m και οι καρτεσιανές του συντεταγμένες (x_o,y_o). Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς για την ροπή αδρανείας, ισχύουν οι σχέσεις:

- Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των x:
  $I_x = my_o^2$
- Ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των y:
  $I_y = mx_o^2$



- Ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο των αξόνων Ο:

$$I_O = mr^2 = m(x^2+y^2) = I_x + I_y$$

> **Παρατηρούμε πως η ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο Ο των καρτεσιανών αξόνων ισούται με το άθροισμα της ροπής αδρανείας ως προς τον κάθε άξονα.**

Η επιφανειακή πυκνότητα.

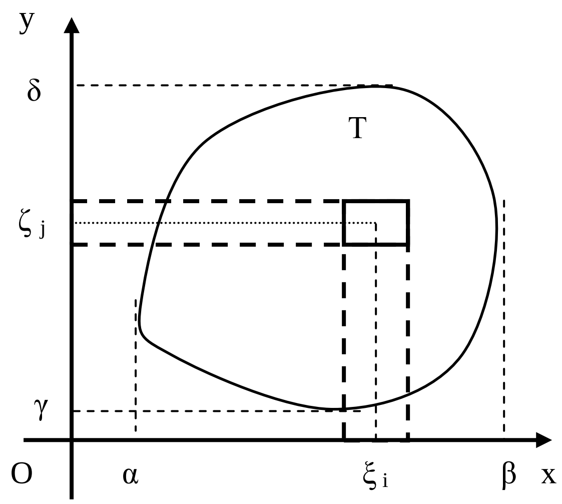
Αν και μια επιφάνεια, σαν χώρος δύο διαστάσεων, δεν μπορεί να περιέχει μάζα, εν τούτοις είναι συχνά χρήσιμο να της αποδοθεί μια πυκνότητα μάζας, η οποία καλείται επιφανειακή πυκνότητα. **Η επιφανειακή πυκνότητα μετρά τη μάζα που περιέχεται στη μονάδα επιφανείας.** Μονάδα της θα μπορούσε να είναι το gr/cm^2. Μία επιφάνεια μπορεί να έχει σταθερή πυκνότητα (οπότε λέγεται ομογενής) ή η πυκνότητά της να είναι συνάρτηση της θέσης του κάθε σημείου:

- Ομογενής $\rho = c$
- Μη ομογενής: $\rho = \rho(x,y)$ ή $\rho = \rho(r,\theta)$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας μιας επίπεδης επιφάνειας Τ, που ανήκει στο επίπεδο Oxy, της οποίας η επιφανειακή πυκνότητα σε ένα σημείο, είναι συνάρτηση της θέσης του σημείου:

$$\rho = \rho(x,y)$$

Διαιρούμε τον τόπο Τ σε στοιχειώδεις ορθογώνιους τόπους πλάτους Δx και Δy, με εμβαδό $\Delta E = \Delta x \Delta y$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη διαίρεση των δύο διαστημάτων των αξόνων των x και y στα οποία εκτείνεται ο τόπος, σε ν και μ υποδιαστήματα, αντίστοιχα. Δηλαδή στα:



Σχ. 2.2.11

$$(\alpha=x_0,x_1), (x_1,x_2), (x_2,x_3), \dots, (x_{i-1},x_i), \dots, (x_{\nu-1},x_\nu=\beta)$$
$$(\gamma=y_0,y_1), (y_1,y_2), (y_2,y_3), \dots, (y_{j-1},y_j), \dots, (y_{\mu-1},y_\mu=\delta)$$

όπου Δx_i και Δy_j είναι το μήκος και τι πλάτος του τυχαίου στοιχειώδους εμβαδού ΔE_{ij}. Λόγω των ελάχιστων διαστάσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε πως η πυκνότητα της στοιχειώδους επιφάνειας ΔE_{ij} είναι σταθερή και ίση με:

$$\boldsymbol{\rho = \rho(\xi_i, \zeta_j)}$$

όπου τα σημεία ξ_i και ζ_j είναι σημεία των διαστημάτων (x_{i-1},x_i) και (y_{j-1},y_j) αντίστοιχα (έστω το μέσον τους). Επομένως η μάζα που περιέχεται στην επιφάνεια ΔE_{ij} δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{M_{ij} = \rho(\xi_i ,\zeta_j)\, \Delta E_{ij} = \rho(\xi_i ,\zeta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j}$$ [1]

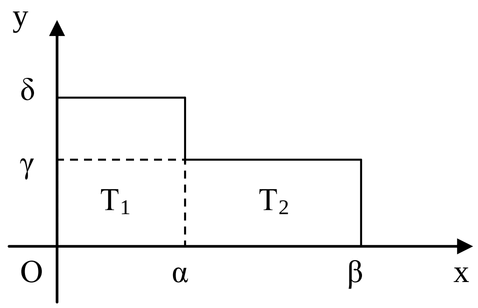
και η ροπή αδρανείας της μάζας αυτής ως προς τους άξονες των x, των y και ως προς το κέντρο των αξόνων είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{\nu}\zeta_i^2\rho(\xi_i,\zeta_j)\Delta x_i\Delta y_j = \iint_T y^2\rho(x,y)dxdy \\ I_y &= \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2\rho(\xi_i,\zeta_j)\Delta x_i\Delta y_j = \iint_T x^2\rho(x,y)dxdy \\ I_O &= \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{\nu}r_{i,j}^2\rho(\xi_i,\zeta_j)\Delta x_i\Delta y_j = \iint_T (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy = I_y + I_x \end{aligned}}$$

όπου ζ_j , ξ_j και $r_{ij} = \sqrt{\xi_i^2 + \zeta_j^2}$ είναι οι αποστάσεις του σημείου (ξ_i ,ζ_j) από τους άξονες των x, των y και από το κέντρο O αντίστοιχα.

2.2.7 Παραδείγματα

1ο) Να υπολογισθούν οι ροπές αδρανείας I_x,, I_y και I_O της διατομής του διπλανού σχήματος, εάν η επιφανειακή πυκνότητά του είναι σταθερή: ρ(x,y) = κ.



Λύση:

- $I_x = \iint_T y^2 \kappa dxdy = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} =$

---

[1] *Η επιφανειακή πυκνότητα δίνει τη μάζα στη μονάδα επιφανείας. Άρα το γινόμενό της επί τη συνολική επιφάνεια, δίνει τη συνολική μάζα που αντιστοιχεί στην επιφάνεια αυτή (θεωρώντας την επιφανειακή πυκνότητα σταθερή).*

$$= \int_0^{\alpha}\left[\int_0^{\delta}\kappa y^2 dy\right]dx + \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_0^{\gamma}\kappa y^2 dy\right]dx = \frac{\kappa}{3}\left[\int_0^{\alpha}\left[y^3\right]_0^{\delta}dx + \int_{\alpha}^{\beta}\left[y^3\right]_0^{\gamma}dx\right] =$$

$$= \frac{\kappa}{3}\left[\int_0^{\alpha}\delta^3 dx + \int_{\alpha}^{\beta}\gamma^3 dx\right] = \frac{\kappa}{3}\left[\delta^3\left[x\right]_0^{\alpha} + \gamma^3\left[x\right]_{\alpha}^{\beta}\right] =$$

$$= \frac{\kappa\alpha\delta^3}{3} + \frac{\kappa(\beta-\alpha)\gamma^3}{3}$$

- $$I_y = \iint_T x^2\kappa dxdy = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} = \int_0^{\alpha}\left[\int_0^{\delta}\kappa x^2 dy\right]dx + \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_0^{\gamma}\kappa x^2 dy\right]dx =$$

$$= \kappa\left[\int_0^{\alpha}x^2\left[y\right]_0^{\delta}dx + \int_{\alpha}^{\beta}x^2\left[y\right]_0^{\gamma}dx\right] = \kappa\left[\int_0^{\alpha}x^2\delta dx + \int_{\alpha}^{\beta}x^2\gamma dx\right] =$$

$$= \frac{\kappa}{3}\left[\delta\left[x^3\right]_0^{\alpha} + \gamma\left[x^3\right]_{\alpha}^{\beta}\right] = \frac{\kappa\delta\alpha^3}{3} + \frac{\kappa\gamma(\beta^3-\alpha^3)}{3}$$

και τέλος:

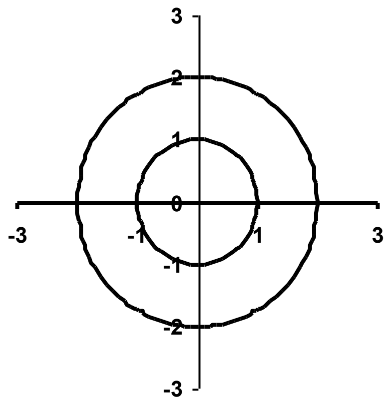
- $$I_O = I_x + I_y = \frac{\kappa\delta\alpha(\alpha^2+\delta^2)}{3} + \frac{\kappa\gamma\left[(\beta^3-\alpha^3)+\gamma^2(\beta-\alpha)\right]}{3}$$

2^{o}) Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας I_O της διατομής του διπλανού δακτυλίου, εάν η επιφανειακή πυκνότητά του είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο O:

$$\rho(x,y) = \kappa\sqrt{x^2+y^2} = \kappa r^2 = \rho(r).$$

Δίνονται οι εξισώσεις των κύκλων:

$x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 2^2$



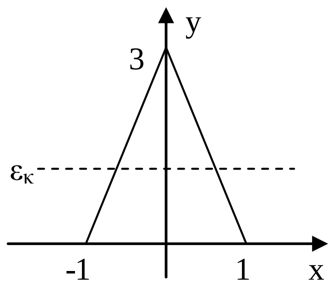
Λύση: Με την πρώτη ματιά γίνεται φανερό πως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (ο τόπος ολοκλήρωσης ορίζεται με συντεταγμένες γραμμές των πολικών, ενώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι συνάρτηση του r).

- $I_O = \iint\limits_T \rho(x,y)(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_T \rho(r)r^2 rdrd\theta = \iint\limits_T \kappa r^2 rdrd\theta =$

$$= \kappa \int_0^{2\pi}\left[\int_1^2 r^3 dr\right]d\theta = \frac{\kappa}{4}\int_0^{2\pi}\left(2^4-1\right)d\theta = \frac{15\kappa}{4}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{15\kappa\pi}{2}$$

3^o) Δίνεται η διπλανή τριγωνική διατομή, της οποίας η επιφανειακή πυκνότητα είναι σταθερή ρ(x,y) = 1.

1. Να υπολογισθούν οι εξισώσεις των δύο ευθειών της διατομής του σχήματος, που ορίζονται από τα σημεία ε_1 [(-1,0) και (0,3)] και ε_2 [(0,3) και (1,0)].
2. Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας I_x της διατομής ως προς τον άξονα των x.
3. Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας I_κ της διατομής ως προς την ευθεία ε_κ, η οποία διέρχεται από το κέντρο βάρους κ της διατομής.



Παρατήρηση: Προσπαθώντας να υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας μιας επίπεδης επιφάνειας, αντλούμε ιδιαίτερη βοήθεια από το θεώρημα του Steiner. Πρέπει όμως να προσέξουμε διότι το θεώρημα αυτό αναφέρεται στη σχέση που συνδέει τη ροπή αδρανείας μιας επιφάνειας Ε (της οποίας το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο κ), ως προς δύο άξονες, όταν:

- οι δύο αυτοί άξονες είναι **παράλληλοι** και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d.
- η επιφανειακή πυκνότητα της Ε είναι σταθερή: ρ(x,y)=ρ

Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα του Steiner δηλώνει πως εάν I_κ είναι η ροπή αδρανείας της επιφάνειας Ε ως προς άξονα (ε_κ) που διέρχεται από το κέντρο βάρους της, και I_0 η ροπή αδρανείας της ως προς άξονα (ε_0) παράλληλο του ε_κ, που βρίσκεται σε απόσταση d από τον ε_κ, τότε οι ροπές αδρανείας συνδέονται από τη σχέση:

$$\mathbf{I_\kappa = I_0 - d^2 E\rho}$$

όπου Ε το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας, ενώ το γινόμενο Ερ δίνει την μάζα της επιφάνειας Ε.

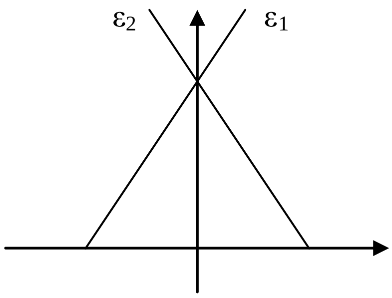
Σύμφωνα με αυτά γίνεται φανερό πως η ροπή αδρανείας μιας επιφάνειας Ε ως προς άξονες οι οποίοι είναι παράλληλοι μεταξύ τους παίρνει ελάχιστη τιμή στην περίπτωση του άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους της Ε.

Λύση:

1. Εξισώσεις των δύο ευθειών:

$$\varepsilon_1: y=ax+b \;\left|\begin{array}{ll} (-1,0) & 0=-a+b \\ (0,3) & 3=b \end{array}\right| \; y = 3x+3$$

$$\varepsilon_2: y=ax+b \;\left|\begin{array}{ll} (0,3) & 3=b \\ (1,0) & 0=a+b \end{array}\right| \; y = -3x+3$$



2. $I_x = \iint_T y^2 dxdy = \int_0^3 \left[\int_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}} y^2 dx \right] dy = \int_0^3 y^2 \left[x \right]_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}} dy = \int_0^3 y^2 \left[\frac{3-y}{3} - \frac{y-3}{3} \right] dy =$

$$= \int_0^3 y^2 \left[\frac{6-2y}{3} \right] dy = \int_0^3 \frac{6y^2 - 2y^3}{3} dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{6} \right]_0^3 = 18 - 13{,}5 = 4{,}5$$

3. Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Steiner χρειαζόμαστε το εμβαδόν της διατομής (του τριγώνου):

$$E_T = B*\upsilon/2 = 2*3/2 = 3$$

καθώς και την απόσταση d της ευθείας ε_κ από τον άξονα των x. Όμως είναι γνωστό πως το βαρύκεντρο τριγώνου βρίσκεται στη διάμεσό του (εδώ η διάμεσος είναι και ύψος και διχοτόμος, μια και το τρίγωνο είναι ισοσκελές) και απέχει από την κορυφή από την οποία φέρεται απόσταση ίση με τα 2/3 της διαμέσου. Έτσι έχουμε d=1, οπότε έχουμε για τη ροπή αδρανείας I_κ:

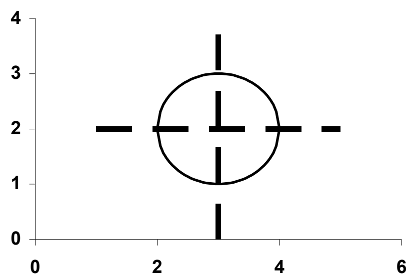
$$I_\kappa = I_x - d^2*E_T = 4{,}5 - 1^2*3 = 1{,}5$$

Άσκηση.

Δίνεται ο κύκλος του διπλανού γραφήματος, με εξίσωση:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

με επιφανειακή πυκνότητα ρ(x,y)=1.



1. Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας του ως προς το κέντρο του, Κ.
2. Να υπολογισθεί η ροπή αδρανείας του ως προς το κέντρο των αξόνων Ο