ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

3.2 Δ.Ε. 1ης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αντιμετωπίσουμε δ.ε. οι οποίες περιέχουν μόνο την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης (y(x)),

$$F(x,y,y') = 0$$

και επομένως η γενική τους λύση θα είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, της μορφής:

$$y = y(x,c)$$

Παρ' όλον ότι οι δ.ε. 1ης τάξης θεωρούνται εύκολες, τελικά λύνονται μόνον εάν η μορφή τους ανήκει στις γνωστές επιλύσιμες μορφές, ενώ παράλληλα θα πρέπει να λύνονται και τα ολοκληρώματα που θα προκύψουν. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάποιες μορφές δ.ε. 1ης τάξης που λύνονται εύκολα.

3.2.1 Δ.Ε. 1ης τάξης, χωριζόμενων μεταβλητών

Στον διαφορικό λογισμό αντιμετωπίσαμε το συμβολισμό dy/dx σαν τον συμβολισμό της πρώτης παραγώγου ο οποίος αντιπροσώπευε το όριο του γνωστού κλάσματος Δy/Δx:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}\right]$$

Στα πλαίσια μιας δ.ε. επιτρέπεται ο διαχωρισμός των διαφορικών της μεταβλητής και της συνάρτησης. Θεωρούμε δηλαδή το συμβολισμό dy/dx σαν ένα κλάσμα…

Σε μια δ.ε. 1ης τάξης χωρίζονται οι μεταβλητές όταν στην εξίσωση μπορούμε να απομονώσουμε στο α' σκέλος της ισότητας όλα τα y με το dy και στο β' σκέλος όλα τα x με το dx. Δηλαδή:

$$F(x,y,y') = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y)dy = g(x)dx$$

οπότε η λύση της δ.ε. προκύπτει από την ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης.

Παράδειγμα 1ο: Να λυθεί η δ.ε.: y' = f(x,y) = 2xy , όταν δίνεται η αρχική συνθήκη y(0)=e.

Λύση: Η δοθείσα δ.ε. γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = 2xdx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y} = \int 2xdx \;\Rightarrow\; \ln y = x^2 + c \;\Rightarrow$$

$$y(x,c) = e^{x^2+c} = e^{x^2}e^{c} = Ce^{x^2}$$

Θέτοντας την αρχική συνθήκη στη γενική λύση έχουμε:

$$e = Ce^0 \quad ή \quad C = e$$

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = ee^{x^2} = e^{x^2+1}$$

Παρατήρηση: Κατά τη λύση της άσκησης αντικαταστάθηκε η ποσότητα e^c με την C. Δημιουργείται λοιπόν η απορία: Πώς είναι δυνατό να αντικαθιστούμε μία ποσότητα που είναι πάντα θετική [την e^c], με τη σταθερά C, η οποία ανήκει σ' ολόκληρο το R;

Μπορούμε να δώσουμε αρκετές απαντήσεις[1]. Θεωρούμε όμως πως η πιο ενδιαφέρουσα απάντηση έχει να κάνει με το ότι στις δ.ε. οι αυθαίρετες σταθερές μπορεί να είναι και μιγαδικές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόζουμε τον τύπο του Euler, ο οποίος μετατρέπει σε απλό μιγαδικό αριθμό, την εκθετική έκφραση e^{m+ni}. Αποδεικνύεται (εύκολα, με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Mac-Laurin) η σχέση:

$$\boxed{e^{m+ni} = e^m e^{ni} = e^m(συνn + iημn)} \qquad (3.2.1)$$

οπότε ισχύει:

$$e^{lnc+\pi i} = c(συν\pi + iημ\pi) = -c$$

Παράδειγμα 2^o: Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.:

$$y' = -\frac{x-1}{y-2}$$

Λύση:

$$(y-2)dy = -(x-1)dx \quad \Rightarrow \quad \int (y-2)dy = -\int (x-1)dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(y-2)^2}{2} = -\frac{(x-1)^2}{2} + c$$

ή

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = R^2$$

όπου θέσαμε $R^2 = 2c$, για να καταλήξουμε στη μονοπαραμετρική οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο (1,2) και ακτίνα R, παρόμοια της οποία είχαμε εξετάσει στο αντίστροφο πρόβλημα του ορισμού της δ.ε. που αντιστοιχεί σε δοσμένη οικογένεια καμπύλων (παράγραφος 3.1.4.)…

---

[1] *Μια από αυτές θα μπορούσε να στηρίζεται στο ότι, λανθασμένα, γράψαμε το ολοκλήρωμα της 1/x σαν lnx αντί του ορθού* $\ln|x|$

Παράδειγμα 3ο: Σε μία καλλιέργεια βακτηρίων, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού τους είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του πλήθους τους.

- Να καταστρωθεί η δ.ε. του προβλήματος (όπου λ[1] ο συντελεστής αναλογίας)
- Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε..
- Να υπολογισθούν οι τιμές των λ και c (όπου c η αυθαίρετη σταθερά) εάν τη στιγμή της αρχικής μέτρησης (t=0) το πλήθος των βακτηρίων της καλλιέργειας ήταν 10^6 και τετραπλασιάστηκε σε 50 ώρες.

Λύση: Το πλήθος των βακτηρίων της καλλιέργειας είναι μία συνάρτηση του χρόνου y(t). Ο ρυθμός μεταβολής της είναι η παράγωγός της. Έτσι η δ.ε. του προβλήματος γράφεται:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \lambda\sqrt{y} = \lambda y^{1/2}$$

στην οποία οι μεταβλητές χωρίζονται:

$$\int y^{-1/2}dy = \int \lambda dt \Rightarrow 2y^{1/2} = \lambda t + c \Rightarrow$$

$$\sqrt{y} = \frac{\lambda}{2}t + c$$

Αντικαθιστώντας τις δύο συνθήκες του προβλήματος έχουμε:

$$1000 = c$$
$$2000 = 25\lambda + c \quad \text{ή} \quad \lambda = 40$$

3.2.1 Ομογενείς δ.ε. 1ης τάξης

Για να ορισθούν οι ομογενείς δ.ε. χρειάζεται να ορισθεί η έννοια του βαθμού ομογένειας μιας συνάρτησης 2 μεταβλητών.

Ορισμός: Η συνάρτηση f(x,y) λέγεται ομογενής, k-βαθμού ομογένειας όταν ισχύει η σχέση:

$$f(cx,cy) = c^k f(x,y)$$

---

(1) *Να θυμίσουμε πως η έκφραση «η ποσότητα M είναι ανάλογη της N» σημαίνει πως το κλάσμα M/N παραμένει πάντα σταθερό. Η τιμή του (έστω λ) είναι η σταθερά αναλογίας, οπότε γράφουμε τη σχέση: M = λN. Έτσι για παράδειγμα διατυπώνεται η σχέση της Νευτώνειας βαρύτητας όπου δύο σημειακές μάζες, m_1 και m_2, υφίστανται μια ελκτική δύναμη η οποία: «είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους». Εδώ ο συντελεστής αναλογίας (G) λέγεται παγκόσμια σταθερά:*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Παραδείγματα:

1^o) Η $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - xy^3$ είναι ομογενής 4^{ου} βαθμού ομογένειας διότι:

$$f(cx,cy) = (cx)^4 + (cx)^2(cy)^2 - (cx)(cy)^3 = c^4(x^4 + x^2y^2 - xy^3) = c^4f(x,y)$$

2^o) Η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{y^2}$ είναι ομογενής 0^{ου} βαθμού ομογένειας διότι:

$$f(cx,cy) = \frac{(cx)^2 - cxcy}{(cy)^2} = \frac{c^2(x^2 - xy)}{c^2y^2} = c^0f(x,y) = f(x,y)$$

Στις περιπτώσεις αυτές (όταν έχουμε μηδενικού βαθμού ομογένεια) η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί και σαν συνάρτηση του κλάσματος των δύο μεταβλητών (δηλαδή του y/x ή του x/y). Πράγματι:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{y^2} = \frac{\dfrac{x^2 - xy}{x^2}}{\dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{1 - y/x}{\left(y/x\right)^2} = g(y/x)$$

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με δ.ε. της μορφής y' = f(x,y) όπου το β' μέλος τους είναι συνάρτηση ομογενής, μηδενικού βαθμού ομογένειας, δηλαδή με δ.ε. που μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή:

$$\mathbf{y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(y/x)} \qquad (3.2.2)$$

Πολύ συχνά στις δ.ε. επιδιώκουμε να τις μετατρέψουμε σε δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, με τη βοήθεια μιας αλλαγής μεταβλητής. Κι ενώ λέγεται «αλλαγή μεταβλητής» στην πραγματικότητα σημαίνει «αλλαγή συνάρτησης».

Έτσι λοιπόν εάν θέσουμε

$$z = \frac{y}{x}$$

ουσιαστικά αντικαθιστούμε την άγνωστη συνάρτηση y(x) με τη z(x). Βέβαια πρέπει να αντικατασταθεί και η παράγωγος y' με την z'. Παραγωγίζοντας τη σχέση μετατροπής έχουμε:

$$y = xz \quad \Rightarrow \quad y' = z + xz'$$

Αντικαθιστώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις στη δ.ε. (3.2.2) έχουμε την νέα έκφρασή της:

$$z + xz' = g(z) \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{dz}{dx} = g(z) - z$$

και η τελευταία αυτή μορφή της δ.ε. έχει μεταβλητές που χωρίζονται. Έχουμε:

$$\frac{dz}{g(z)-z}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \int\frac{dz}{g(z)-z}+c$$

απ' όπου:

$$\boxed{x = Ce^{\int\frac{dz}{g(z)-z}}} \qquad (3.2.3)$$

όπου θέσαμε και πάλι $C = e^c$.

Παρατηρήσεις:

1. Ο τύπος (3.2.3) ορίζει τη λύση της ομογενούς δ.ε. σαν μια συνάρτηση $x=x(z,c)$, δηλαδή θεωρεί το x συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής z. Βέβαια, επειδή στο τελικό αποτέλεσμα ξανα-αντικαθιστούμε το z με το κλάσμα y/x, τελικά η γενική λύση είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση της μορφής

$$\Phi(x,y,c) = 0$$

2. Όταν κατά τη λύση μιας δ.ε. χρησιμοποιούμε έτοιμους τύπους επίλυσης (σαν τον 3.2.3), στους οποίους έχει ενσωματωθεί η αυθαίρετη σταθερά c, τότε κατά τη λύση των ενδιάμεσων ολοκληρωμάτων δεν προσθέτουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης (+c).

Παράδειγμα 1^o: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

για αρχική συνθήκη: y(1) = 3.

Λύση: Παρατηρούμε πως το β' μέλος της δ.ε. είναι ρητό, ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ομογενείς συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού. Επομένως το β' μέλος θα είναι συνάρτηση 0^{ου} βαθμού ομογένειας και μπορεί να γραφεί:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}=\frac{3}{2}\frac{y}{x}-\frac{1}{2\,y/x}=g(y/x)=g(z)=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2z}$$

όπου θέσαμε $z=\dfrac{y}{x}$

Στη συνέχεια λύνουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{dz}{g(z)-z}=\int\frac{dz}{\left(\frac{3z}{2}-\frac{1}{2z}-z\right)}=\int\frac{dz}{\left(\frac{z^2-1}{2z}\right)}=\int\frac{2z}{z^2-1}dz=$$

$$=\int\frac{1}{z^2-1}d(z^2-1)=\ln(z^2-1)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος στον τύπο (3.2.3) έχουμε τη γενική λύση:

$$x = ce^{\ln(z^2-1)} \quad \Rightarrow \quad x = c(z^2-1) \quad \Rightarrow \quad x = c(\frac{y^2-x^2}{x^2}) \quad \Rightarrow$$

$$y^2 - x^2 = cx^3$$

όπου θέσαμε c=1/c. Έτσι προκύπτει η γενική λύση της δ.ε.:

$$y(x,c) = \pm\sqrt{cx^3 + x^2}$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την αρχική συνθήκη $y(1) = 3$ υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς:

$$3 = \pm\sqrt{c+1}$$

απ' όπου προκύπτει πως c=8, ενώ παράλληλα απορρίπτεται και το πρόσημο μείον. Καταλήγουμε λοιπόν στη μερική λύση:

$$y(x) = \sqrt{8x^3 + x^2}$$

Παράδειγμα 2^o: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\varepsilon\varphi\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$$

όταν δίνεται η αρχική συνθήκη: $y(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Λύση: Παρατηρούμε πως το β' μέλος της δ.ε. είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, ομογενής, μηδενικού βαθμού ομογένειας. Επομένως μπορεί να γραφεί:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\varepsilon\varphi\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{y}{x} + \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}{\frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right) = g\ z\ = z + \frac{\varepsilon\varphi\ z^2}{z}$$

όπου θέσαμε $z = \frac{y}{x}$

Στη συνέχεια λύνουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dz}{g(z)-z} = \int \frac{dz}{\left(z + \frac{\varepsilon\varphi\ z^2}{z} - z\right)} = \int \frac{z}{\varepsilon\varphi\ z^2} dz = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma\upsilon\nu\ z^2}{\eta\mu\ z^2} dz^2 = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma\upsilon\nu\ t}{\eta\mu\ t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\eta\mu\ t} d\eta\mu\ t = \frac{1}{2}\ln\left|\eta\mu\ t\ \right| = \frac{1}{2}\ln\left|\eta\mu\ z^2\ \right|$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος στον τύπο (3.2.3) έχουμε τη γενική λύση:

$$x = ce^{\frac{1}{2}\ln\left|\eta\mu\ z^2\ \right|} = c\sqrt{\left|\eta\mu\ z^2\ \right|} = c\sqrt{\left|\eta\mu\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right|}$$

όπου θέσαμε c=1/c. Έτσι προκύπτει η γενική λύση της δ.ε.:

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την αρχική συνθήκη $y(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς:

$$c=1$$

οπότε η μερική λύση:

$$x = \sqrt{\eta\mu\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}$$

Άσκηση: Να βρεθεί η γενική και η μερική λύση, εάν η αρχική συνθήκη είναι η y(1)=1, της δ.ε.:

$$y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

3.2.1 Γραμμικές δ.ε. 1$^{\eta\varsigma}$ τάξης

Οι γραμμικές δ.ε. 1$^{\eta\varsigma}$ τάξης είναι ίσως οι εξισώσεις που συναντώνται περισσότερα στα προβλήματα Φυσικής γενικά, αλλά και της Μηχανικής ειδικότερα. Η μορφή τους είναι η εξής:

$$A(x)y' + B(x)y = \Gamma(x)$$

ή συνηθέστερα

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \qquad (3.2.4)$$

όπου P(x)=B(x)/A(x) και Q(x)=Γ(x)/A(x)

Υπολογισμός της γενικής λύσης της γραμμικής δ.ε. (3.2.4): Για άλλη μία φορά επιχειρούμε να βρούμε ένα μετασχηματισμό, ο οποίος να μας οδηγεί σε δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών. Ας πάμε ψάχνοντας. Θεωρούμε πως η άγνωστη συνάρτηση y(x) είναι γινόμενο δύο νέων συναρτήσεων (της g(x) και της u(x)), των οποίων τη μορφή αγνοούμε:

$$y(x) = g(x)u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = g'u + gu'$$

και η δ.ε. γίνεται

$$g'u + gu' + P(x)gu = Q(x) \quad \Rightarrow \quad g'u + g(u' + P(x)u) = Q(x)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση απλοποιείται (και γίνεται χωριζόμενων μεταβλητών) εάν επιλέξουμε τη συνάρτηση u(x) έτσι ώστε να μηδενίζεται η παρένθεση:

$$u' + P(x)u = 0$$

η σχέση αυτή είναι μία δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, από την οποία υπολογίζεται η συνάρτηση u(x):

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln u = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

Επιλέγοντας λοιπόν τη συνάρτηση u όπως πιο πάνω, (οπότε μηδενίζεται η παρένθεση $u' + P(x)u$), η δ.ε. γίνεται:

$$g'u(x) = Q(x) \quad \Rightarrow \quad g' = u^{-1}(x)Q(x) \quad \text{οπότε}$$

$$g(x) = \int u^{-1}(x)Q(x)dx = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

Τώρα πλέον υπολογίζουμε την συνάρτηση y(x):

$$y(x) = u(x)g(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]} \qquad (3.2.5)$$

Παράδειγμα 1^{o}: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$y' = x + y \quad \text{με αρχική συνθήκη} \quad y(0) = 0$$

Λύση: Γράφοντας τη δ.ε. υπό τη μορφή:

$$y' - y = x$$

διαπιστώνουμε πως είναι γραμμική με $P(x) = -1$ και $Q(x) = x$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα δύο ολοκληρώματα που εμφανίζονται στον τύπο (3.2.5), εφαρμόζοντας και πάλι την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου, σύμφωνα με την οποία δεν προσθέτουμε την σταθερά ολοκλήρωσης κατά την επίλυση ολοκληρωμάτων που θα τοποθετηθούν σε γενικό τύπο λύσης, στον οποίο έχει ήδη ενσωματωθεί η σταθερά c.

- $\int P(x)dx = -\int dx = -x$
- $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$

  $= -e^{-x}(x+1)$

οπότε η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y(x,c) = e^{x}[c-e^{-x}(x+1)] = ce^{x} - x - 1$$

ενώ υπολογίζοντας την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς, βάσει της αρχικής συνθήκης που μας δόθηκε, έχουμε:

$$y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = c - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

οπότε καταλήγουμε στη μερική λύση:

$$y(x) = e^{x} - x - 1$$

Παράδειγμα 2^{o}: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$xy' = x^3 + 2y \quad \text{με αρχική συνθήκη} \quad y(1) = 2$$

Λύση: Γράφοντας τη δ.ε. υπό τη μορφή:

$$y' - 2y/x = x^2$$

διαπιστώνουμε πως είναι γραμμική με $P(x) = -2/x$ [ο συντελεστής του y] και $Q(x) = x^2$. Υπολογίζουμε και πάλι τα δύο ολοκληρώματα του τύπου (3.2.5),

- $\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln x = \ln x^{-2}$
- $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int x^2 e^{\ln x^{-2}}dx = \int x^2 x^{-2}dx = \int dx = x$

Η γενική λύση:

$$y(x,c) = e^{-\ln x^{-2}}[c + x] = cx^2 + x^3$$

και για την μερική λύση, αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη στη γενική λύση, υπολογίζοντας την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς c:

$$y(1)=2 \quad \Rightarrow \quad 2 = c + 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$y(x) = x^3 + x^2$$

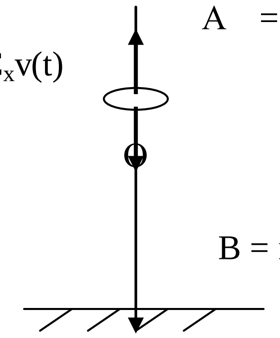
Παράδειγμα 3^{o}: Ένας αλεξιπτωτιστής πηδάει από το ελικόπτερο και τη στιγμή που ανοίγει το αλεξίπτωτό του (έστω t=0 με s(0)=0) έχει ήδη ταχύτητα πτώσης 15 m/sec. Δίνονται:

- Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας κίνησης (οι ταχύτητες που αναπτύσσονται θεωρούνται μικρές[(1)]), ενώ ο συντελεστής αεροδυναμικής αντίστασης ισούται με C_x=160 Kgr/sec.
- Η μάζα του αλεξιπτωτιστή m=80 Kgr (g = 10 m/sec^2)

Ζητούνται:

- Η κατάστρωση της δ.ε. του προβλήματος.
- Η συνάρτηση της ταχύτητας της κίνησης v=v(t).
- Η συνάρτηση της θέσης s=s(t).
- Η οριακή ταχύτητα με την οποία θα φθάσει στο έδαφος ο αλεξιπτωτιστής.

Λύση: Επιλέγουμε σαν σύστημα αναφοράς την κατακόρυφη ευθεία πάνω στην οποία κινείται ο αλεξιπτωτιστής, με κέντρο Ο το σημείο στο οποίο «ανοίγει» ολοκληρωτικά το αλεξίπτωτό του, και ξεκινά να μετρά ο χρόνος. Η άγνωστη συνάρτηση, την οποία αναζητούμε, είναι η συνάρτηση θέσης του αλεξιπτωτιστή s=s(t).



Έτσι έχουμε σαν αρχικές συνθήκες τις:

- Το βάρος του B = mg [θεωρούμε πως δεν απέχει πολύ από την επιφάνεια της Γης].
- Η αντίσταση της ατμόσφαιρας A = -C_xv(t) , [είναι ανάλογη της ταχύτητας] όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει πως το διάνυσμα της αντίστασης έχει αντίθετη φορά από αυτό της ταχύτητας.

Θέτοντας $a(t)=\ddot{s}$ και $v(t)=\dot{s}$, η γνωστή σχέση F = ma γίνεται:

$$m\ddot{s} = mg - C_x\dot{s}$$

που είναι μια δ.ε. την οποία δεν ξέρουμε να λύνουμε, διότι είναι 2^{ης} τάξης. Παρατηρούμε όμως πως πουθενά δεν εμφανίζεται η συνάρτηση θέσης s(t). Στις περιπτώσεις αυτές θεωρούμε σαν

[(1)] *Ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα v, υφιστάμενο την αντίσταση της ατμόσφαιρας, υφίσταται μιαν αντίσταση η οποία:*
α) είναι ανάλογη της ταχύτητας, εάν η ταχύτητα v είναι ιδιαίτερα μικρή (της τάξης των λίγων μέτρων ανά δευτερόλεπτο, που εξαρτάται από τη μορφή του σώματος και από το πότε θα ξεκινήσουν στροβιλισμοί του αέρα γύρω από το σώμα),
β) είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας v, όταν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη της προηγούμενης και μικρότερη της ταχύτητας του ήχου,
γ) είναι ανάλογη του κύβου (της τρίτης δύναμης) της ταχύτητας v, όταν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του ήχου.

άγνωστη συνάρτηση της δ.ε. την πρώτη παράγωγο [εδώ την ταχύτητα v(t)], μειώνοντας με τον τρόπο αυτό την τάξη της δ.ε..

$$m\dot{v} + C_x v = mg \qquad \text{ή} \qquad \dot{v} + \frac{C_x}{m} v = g$$

η οποία είναι γραμμική δ.ε., με $P(t) = \dfrac{C_x}{m}$ και $Q(t) = g$

Λύνουμε λοιπόν τα ολοκληρώματα:

- $$\int P(t)dt = \int \frac{C_x}{m} dt = \frac{C_x}{m} t$$
- $$\int Q(t) e^{\int P(t)dt} dt = \int g e^{\frac{C_x}{m}t} dt = \frac{mg}{C_x} \int e^{\frac{C_x}{m}t} d\frac{C_x}{m} t = \frac{mg}{C_x} e^{\frac{C_x}{m}t}$$

Γενική λύση:

$$v(t,c) = e^{-\frac{C_x}{m}t}\left[c + \frac{mg}{C_x} e^{\frac{C_x}{m}t}\right] = c e^{-\frac{C_x}{m}t} + \frac{mg}{C_x} \qquad (3.2.6)$$

ενώ ολοκληρώνοντας τη σχέση της ταχύτητας, υπολογίζουμε τη συνάρτηση θέσης s(t):

$$s(t,c,c_2) = \int \left[c e^{-\frac{C_x}{m}t} + \frac{mg}{C_x}\right] dt = -c\frac{m}{C_x} e^{-\frac{C_x}{m}t} + \frac{mg}{C_x} t + c_2$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές των ποσοτήτων m, g και C_x, φθάνοντας στις σχέσεις:

$$v(t,c) = ce^{-2t} + 5 \quad \text{και} \quad s(t,c,c_2) = -\frac{c}{2} e^{-2t} + 5t + c_2$$

που αποτελούν τη γενική λύση του προβλήματος. Με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών υπολογίζουμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές c και c_2, βρίσκοντας τη μερική λύση που αντιστοιχεί…

v(0) = 15 = c + 5 ή c = 10
s(0) = 0 = -c/2 + c_2 ή c_2 = 5

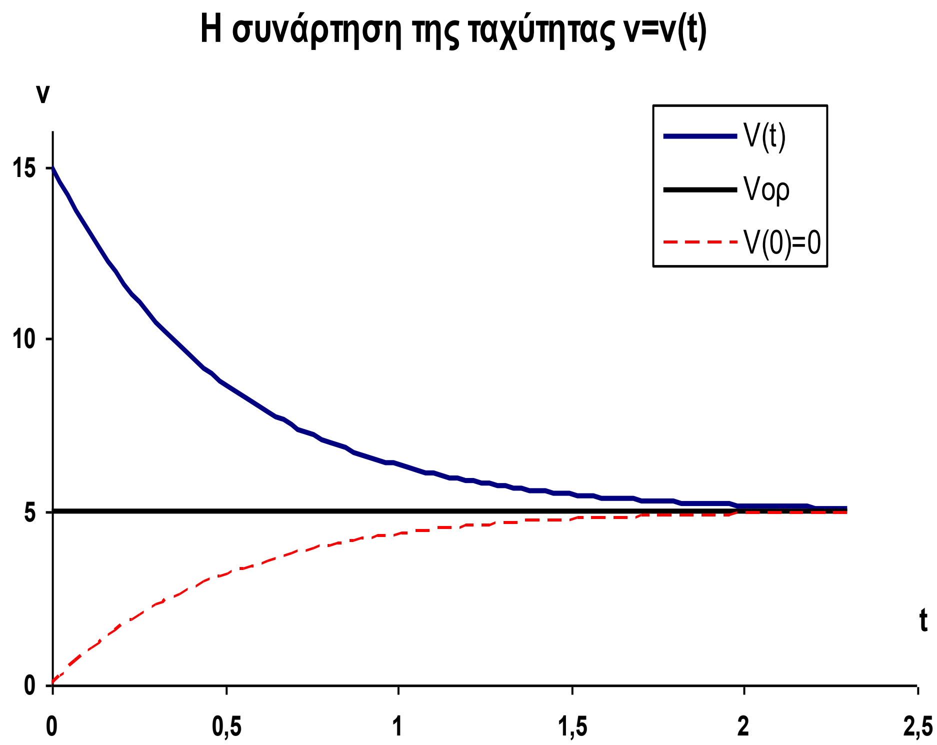
$$v(t) = 10e^{-2t} + 5 \quad \text{και} \quad s(t,c,c_2) = -5e^{-2t} + 5t + 5 \qquad (3.2.7)$$

Παρατηρήσεις:

1. Στις σχέσεις 3.2.6 και 3.2.7 που περιγράφουν τη συνάρτηση της ταχύτητας, παρατηρούμε πως έχουμε το άθροισμα δύο ποσοτήτων. Η πρώτη είναι εκθετική, με αρνητικό εκθέτη και τείνει στο μηδέν όταν μεγαλώνει το t, γι’αυτό και λέγεται «μεταβατική».
2. Η δεύτερη ποσότητα είναι σταθερή και είναι αυτή που θα παραμείνει όταν μηδενιστεί η μεταβατική, για το λόγο αυτό λέγεται παραμένουσα. Ακόμη συχνότερα λέγεται **«οριακή ταχύτητα»,** μια και είναι το όριο της ταχύτητας, όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.
3. Στη γενική λύση, η παραμένουσα ταχύτητα είναι η $v_\pi = mg/C_x$ και υπολογίζεται χωρίς να λυθεί η δ.ε.. Σκεπτόμαστε πως η οριακή ταχύτητα είναι η ταχύτητα για την οποία η ατμοσφαιρική αντίσταση εξισώνεται με το βάρος του αλεξιπτωτιστή, οπότε μηδενίζεται η συνισταμένη των δυνάμεων που επενεργούν στον αλεξιπτωτιστή. Έτσι αυτός θα εκτελεί μια ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.

$$F_{o\lambda} = mg - C_x v(t) = 0 \quad \text{απ' όπου} \quad v_{o\rho} = \frac{mg}{C_x}$$

Γραφική παράσταση: Στην παρακάτω παράσταση εμφανίζεται η ταχύτητα v(t) όταν έχουμε αρχική συνθήκη: v(0) = 15 m/s, καθώς και αυτή που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη: v(0) = 0 m/s. Στην πρώτη περίπτωση η ταχύτητα καταλήγει στην οριακή [$v_{o\rho}$ = 5 m/s], ξεκινώντας από την v(0) = 15 m/s, διαρκώς μειούμενη. Στη δεύτερη, η ταχύτητα είναι μηδέν [για t=0] και αυξάνει τείνοντας στην οριακή…



Παράδειγμα 4^o: Θα λύσουμε τώρα το παράδειγμα που είδαμε στο 2^o παράδειγμα της παραγράφου 3.1.3. Ένα ποτήρι νερό, του οποίου η θερμοκρασία μεταβάλλεται με το χρόνο (θ(t)), μεταφέρεται σε ανοικτό χώρο με θερμοκρασία θ_x. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του νερού είναι ανάλογος της διαφοράς ανάμεσα στη θερμοκρασία του νερού και του χώρου, με ένα συντελεστή αναλογίας λ. Να βρεθεί η συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού θ(t).

Λύση: Είδαμε, στην παράγραφο 3.1.3, πως η δ.ε. που περιγράφει το πιο πάνω πρόβλημα είναι η:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\lambda(\theta(t) - \theta_x)$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν γραμμική δ.ε., εάν γραφεί υπό τη μορφή:

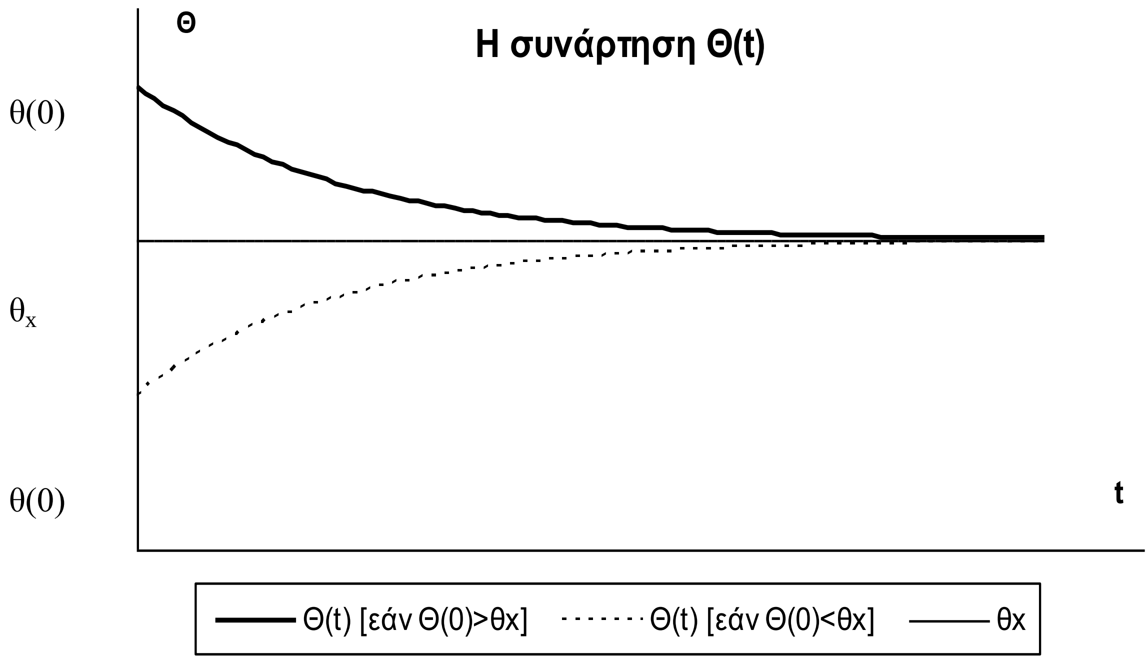
$$\dot{\theta} + \lambda\theta = \lambda\theta_x$$

Λύνεται όμως και σαν χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\frac{d\theta}{\theta - \theta_x} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\theta}{\theta - \theta_x} = -\int \lambda dt \quad \Rightarrow \quad \ln(\theta-\theta_x) = -\lambda t + c$$

$$\theta(t) = e^{-\lambda t+c} + \theta_x = Ce^{-\lambda t} + \theta_x$$

όπου θέσαμε $C = e^c$. Σαν άσκηση ας λυθεί από τον αναγνώστη η πιο πάνω δ.ε. και σαν γραμμική (δίνοντας φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα).



3.2.1 Πλήρεις δ.ε. 1ης τάξης. (Ολοκλήρωση των ολικών διαφορικών)

Στην παράγραφο Α.5, στο κεφάλαιο των μερικών παραγώγων, σε μία θεωρητική άσκηση (το 1ο παράδειγμα) δείξαμε πως η παράσταση: A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f όταν ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (3.2.8)$$

Στην τωρινή παράγραφο θα ασχοληθούμε με δ.ε. της μορφής:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (3.2.9)$$

Εάν το αριστερό μέλος της δ.ε. (3.2.9) είναι ολικό κάποιας συνάρτησης f(x,y) [πράγμα που θα συμβαίνει εάν ισχύει η (3.2.8)], τότε η δ.ε. γράφεται:

$$df(x,y) = 0$$

και διαβάζεται:

- «Το ολικό διαφορικό της f είναι μηδέν», ή αλλιώς
- «Η ολική μεταβολή της τιμής της f(x,y), όταν μεταβάλλονται τα x και y είναι μηδέν», ή αλλιώς
- «Η συνάρτηση f(x,y) είναι σταθερή»

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η γενική λύση της δ.ε. (Γ3.2.9) είναι η προφανής:

$$f(x,y) = c \qquad (3.2.10)$$

Άρα το πρόβλημα στις πλήρεις δ.ε. είναι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση f(x,y), της οποίας είναι ολικό διαφορικό, το α’ μέλος της δ.ε.. Αυτή υπολογίζεται εύκολα αν αναλογισθούμε τη σχέση του ολικού διαφορικού μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Συγκρίνοντάς το με το ά μέλος της δ.ε. έχουμε πως:

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν δύο εκφράσεις για τη συνάρτηση f(x,y):

$$f(x,y) = \int P(x)dx + c_1(y) \quad \text{και} \quad f(x,y) = \int Q(y)dy + c_2(x)$$

όπου στην πρώτη ολοκλήρωση [ως προς x] η σταθερά ολοκλήρωσης είναι, εν γένει, μια συνάρτηση του y, μια και το y θεωρείται σταθερό και στη μερική παραγώγιση ως προς x, και στην ολοκλήρωση ως προς x . Όμοια στο δεύτερο ολοκλήρωμα η σταθερά ολοκλήρωσης είναι συνάρτηση του x. Η σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων δίνει την πλήρη μορφή της συνάρτησης [κατά προσέγγιση μιας σταθεράς c, η οποία εμφανίζεται στη γενική λύση (3.2.10)].

Παράδειγμα 1^{o}: Να βρεθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.

$(2x\text{-}6xylnx\text{-}3xy)dx + (3y^2\text{-}3x^2lnx)dy = 0$, με αρχική συνθήκη: y(1) = 1.

Λύση: Αρχικά θα διαπιστώσουμε το εάν το α’ μέλος της δ.ε. είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f(x,y):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2x - 6xylnx - 3xy\right] = 6xlnx - 3x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[3y^2 - 3x^2lnx\right] = 6x\ln x - 3x$$

Από την ισότητα των προηγούμενων δύο μερικών παραγώγων συμπεραίνουμε πως το α’ μέλος της δ.ε. είναι πράγματι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f(x,y). Ας την υπολογίσουμε:

$$f(x,y) = \int\left[2x - 6xylnx - 3xy\right]dx = x^2 - 3x^2y\ln x - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{2}x^2y + c_1(y) =$$
$$= x^2 - 3x^2y\ln x + c_1(y)\ ^{(1)}$$

$$f(x,y) = \int\left[3y^2 - 3x^2lnx\right]dy = y^3 - 3x^2y\ln x + c_2(x)$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις της f(x,y) καταλήγουμε:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x^2ylnx$$

Επομένως, η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι η:

$$x^2 + y^2 - 3x^2ylnx = c$$

ενώ η μερική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη της εκφώνησης:

$$1^2 + 1^2 - 3*1^2*1*0 = c \quad \text{οπότε} \quad c = 2$$

---

(1) *Η λύση του ολοκληρώματος:*

$$I = \int 6x\ln x dx = 3\int \ln x d(x^2) = 3x^2\ln x - 3\int x^2 d(\ln x) = 3x^2\ln x - 3\int x dx = 3x^2\ln x - \frac{3}{2}x^2 + c$$

που δίνει τη συνάρτηση:

$$x^2 + y^2 - 3x^2 y\ln x = 2$$

3.2.1 Η Διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Η μορφή της δ.ε. του Bernoulli είναι η:

$$A(x)y' + B(x)y = \Gamma(x)y^{\nu}$$

η οποία (διαιρώντας με την Α(x)) μετατρέπεται στην:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\nu} \quad \text{για } \nu \in R - \{0,1\} \qquad (3.2.11)$$

όπου: $P(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$ και $Q(x) = \dfrac{\Gamma(x)}{A(x)}$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως για την τιμή ν=0 η (3.2.11) μετατρέπεται σε γραμμική, ενώ εάν ν=1, τότε μετατρέπεται σε χωριζομένων μεταβλητών. Ας εξετάσουμε αυτό το τελευταίο:

$$y' + P(x)y = Q(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \left[Q(x) - P(x)\right]y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \left[Q(x) - P(x)\right]dx$$

Η δ.ε. $y' + P(x)y = Q(x)y^{\nu}$ μετατρέπεται σε γραμμική μέσω του μετασχηματισμού (αλλαγής της συνάρτησης y(x) με την u(x)):

$$u(x) = [y(x)]^{1-\nu} \quad \text{οπότε} \quad \frac{du(x)}{dx} = \frac{d(y^{1-\nu})}{dx} = (1-\nu)y^{-\nu}\frac{dy}{dx} \quad \text{και}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{\nu}}{1-\nu}\frac{du}{dx} \qquad (3.2.12)$$

Αντικαθιστώντας την 3.2.12 στην δ.ε. του Bernoulli έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}+P\ \ x\ \ y=Q\ \ x\ \ y^{\nu} \quad \overset{u=y^{1-\nu}}{\Longrightarrow} \quad \frac{y^{\nu}}{1-\nu}\frac{du}{dx}+P\ \ x\ \ y=Q\ \ x\ \ y^{\nu} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}+\ \ 1-\nu\ \ P\ \ x\ \ y^{1-\nu}=\ \ 1-\nu\ \ Q\ \ x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du\ \ x}{dx}+\ \ 1-\nu\ \ P\ \ x\ \ u\ \ x\ \ =\ \ 1-\nu\ \ Q\ \ x$$

όπου η τελευταία δ.ε. είναι γραμμική.

Παράδειγμα 1^{o}: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$y'+xy=\frac{x^3}{y^2} \qquad =x^3y^{-2}$$

και αρχική συνθήκη: y(0)=1

Λύση: Εκτελούμε τον μετασχηματισμό: **u(x) = y(x)^{3}**, και έχουμε:

$$\frac{du}{dx}=3y^2\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}y^{-2}\frac{du}{dx}$$

οπότε η δοσμένη δ.ε.:

$$y'+xy=x^3y^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}y^{-2}\frac{du}{dx}+xy=x^3y^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}+3xy^3=3x^3 \quad \Rightarrow$$

$$u'+3xu=3x^3 \quad \text{Γραμμικη με} \quad \left[\begin{array}{l} P(x)=3x \\ Q(x)=3x^3 \end{array}\right.$$

Λύση των ολοκληρωμάτων:

- $\displaystyle \int P(x)dx=\int 3xdx=\frac{3}{2}x^2$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int\left[3x^3 e^{\frac{3}{2}x^2}\right]dx = \int\left[x^2 e^{\frac{3}{2}x^2}\right]d\left(\frac{3}{2}x^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\int\left[\frac{3}{2}x^2 e^{\frac{3}{2}x^2}\right]d\left(\frac{3}{2}x^2\right) = \frac{2}{3}\int \ ze^z \ \ dz =$$

•

$$= \frac{2}{3} \ ze^z - e^z \ = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x^2 e^{\frac{3}{2}x^2} - e^{\frac{3}{2}x^2}\right) = e^{\frac{3}{2}x^2}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων στον τύπο λύσης της γραμμικής δ.ε. έχουμε:

$$u \ \ x,c \ = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] = e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[c + e^{\frac{3}{2}x^2}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)\right] \quad \Rightarrow$$

$$u \ \ x,c \ = ce^{-\frac{3}{2}x^2} + x^2 - \frac{2}{3}$$

και ξαναγυρίζοντας στη συνάρτηση y(x), βρίσκουμε τη γενική λύση :

$$u \ \ x,c \ = y \ \ x,c \ ^3 = ce^{-\frac{3}{2}x^2} + x^2 - \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow$$

$$y \ \ x,c \ = \sqrt[3]{ce^{-\frac{3}{2}x^2} + x^2 - \frac{2}{3}}$$

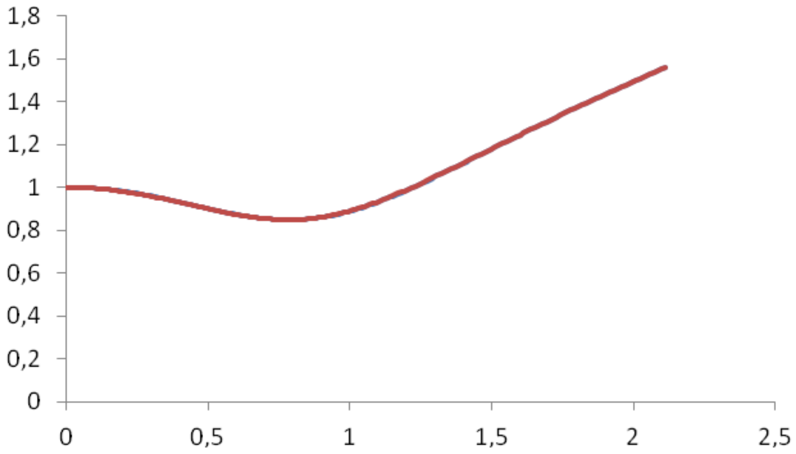
Αναζητούμε την μερική λύση αντικαθιστώντας στην γενική λύση την αρχική συνθήκη:

$$1 = \left[\sqrt[3]{ce^{-\frac{3}{2}x^2} + x^2 - \frac{2}{3}}\right]_{x=0} = \sqrt[3]{c - \frac{2}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{5}{3}$$

οπότε η μερική λύση:

$$y \ \ x \ = \sqrt[3]{\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{2}x^2} + x^2 - \frac{2}{3}}$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 2ο: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.:

$$y' + \frac{1}{x} y = e^{3/x} y^3$$

και αρχική συνθήκη: $y(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{3}e^3}}$

Λύση: Εκτελούμε τον μετασχηματισμό: **u(x) = y(x)**$^{-2}$, και έχουμε:

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}$$

οπότε η δοσμένη δ.ε.:

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{3/x}y^3 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}y = e^{3/x}y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - \frac{2}{x}y^{-2} = -2e^{3/x} \quad \Rightarrow$$

$$u' - \frac{2}{x}u = -2e^{3/x} \quad \text{Γραμμικη με} \quad \begin{cases} P(x) = -\dfrac{2}{x} \\ Q(x) = -2e^{3/x} \end{cases}$$

Λύση των ολοκληρωμάτων:

- $$\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| = \ln\left(x^{-2}\right)$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int -2e^{3/x}e^{\ln x^{-2}}\,dx = \int -2x^{-2}e^{3/x}dx = \int -2e^{3/x}d\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

- $$= \frac{2}{3}\int e^{3/x}d\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{2}{3}e^{3/x}$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων στον τύπο λύσης της γραμμικής δ.ε. έχουμε:

$$u\;\; x,c\; = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] = e^{-\ln\; x^{-2}}\left[c + \frac{2}{3}e^{3/x}\right] \quad \Rightarrow$$

$$u\;\; x,c\; = x^2\left[c + \frac{2}{3}e^{3/x}\right]$$

και ξαναγυρίζοντας στη συνάρτηση y(x), βρίσκουμε τη γενική λύση :

$$u\;\; x,c\; = \frac{1}{y(x,c)^2} = x^2\left[c + \frac{2}{3}e^{3/x}\right] \quad \Rightarrow$$

$$y(x,c) = \pm\frac{1}{x\sqrt{c + \frac{2}{3}e^{3/x}}}$$

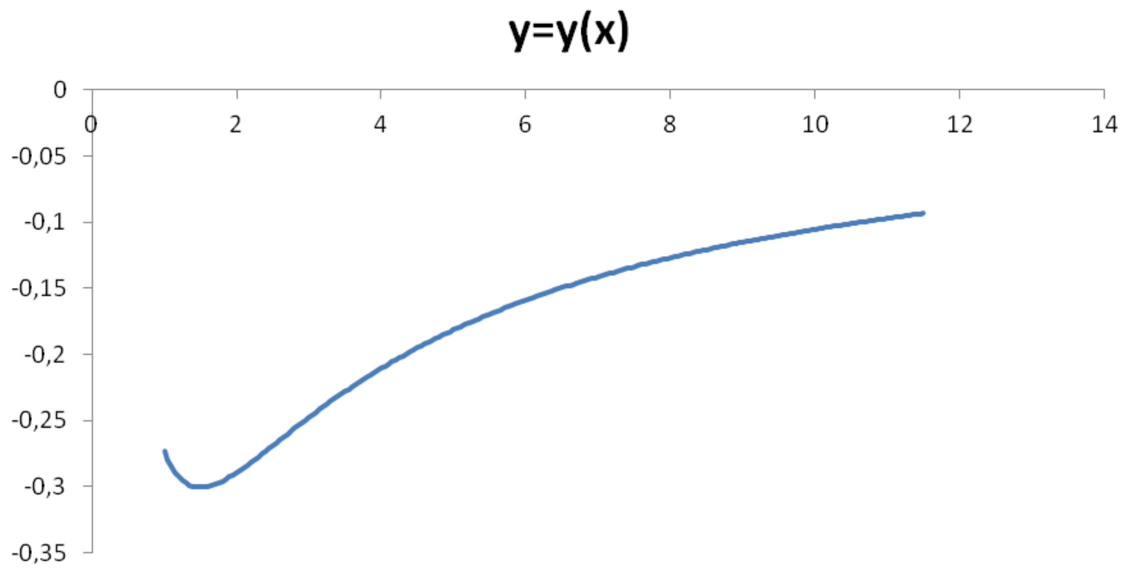
Αναζητούμε την μερική λύση αντικαθιστώντας στην γενική λύση την αρχική συνθήκη:

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}e^3}} = \pm\left.\frac{1}{x\sqrt{c + \frac{2}{3}e^{3/x}}}\right|_{x=1} = \pm\frac{1}{\sqrt{c + \frac{2}{3}e^3}}$$

απ’ όπου προκύπτει πως c = 0, ενώ το πρόσημο (+) απορρίπτεται. Έτσι η μερική λύση της δ.ε. είναι:

$$y(x) = -\frac{1}{x\sqrt{\frac{2}{3}e^{3/x}}}$$

με γραφική παράσταση:



3.2.1 Ασκήσεις

1η) Να βρεθούν οι γενικές και οι μερικές λύσεις των δ.ε., για τις προτεινόμενες αρχικές συνθήκες:

- $2ydy - \frac{\ln x}{x}dx = 0$ $\quad y(1) = 1$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ $\quad y(1) = 0$
- $(2x+\eta\mu y)dx + (x\sigma\upsilon\nu y - 9y^2 - 1/y)dy = 0$ $\quad y(0) = 1$