Τεχνολογικο Εκπαιδευτικο Ιδρυμα Κεντρικης Μακεδονιας - Σερρες
Τμημα Μηχανικων Πληροφορικης

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
2. ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ
3. ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - Μ-ΜΕΘΟΔΟΣ
4. ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & & & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 8 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Να λυθεί με τη βοήθεια της Μεθόδου Simplex .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Τυπική μορφή

$$\max \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 10 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & & & + & x_6 & = & 8 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

δηλαδή

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Οι στήλες P_1, P_5 και P_6 σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα και αποτελούν την βάση του αρχικού Simplex tableau .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z								Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10							Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10	0						Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10	0	-1					Γ_4

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10	0	-1	2				Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2			Γ_4

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0		Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0	Γ_4

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0		Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1		Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1		Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	∞	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1		Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	∞	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	4	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

Επιλογή γραμμής

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	∞	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	4	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	∞	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	4	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma'_r = \frac{1}{y_{r,k}}\Gamma_r \\ \Gamma'_i = \Gamma_i - y_{i,k}\Gamma'_r \quad i \neq r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \Gamma'_3 = \frac{1}{y_{3,4}}\Gamma_3 \\ \Gamma'_1 = \Gamma_1 - y_{1,4}\Gamma'_3 \\ \Gamma'_2 = \Gamma_2 - y_{2,4}\Gamma'_3 \\ \Gamma'_4 = \Gamma_4 - y_{4,4}\Gamma'_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \Gamma'_3 = \frac{1}{2}\Gamma_3 \\ \Gamma'_1 = \Gamma_1 - 2\Gamma'_3 \\ \Gamma'_2 = \Gamma_2 \\ \Gamma'_4 = \Gamma_4 + 2\Gamma'_3 \end{array}$$

και δημιουργούμε το επόμενο Simplex tableau .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	∞	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	4	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 2\Gamma_3'$
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		$\Gamma_2' = \Gamma_2$
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$		$\Gamma_3' = \frac{1}{2}\Gamma_3$
	z	-2	0	0	2	0	0	1		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_3'$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		Γ_1'
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		Γ_2'
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$		Γ_3'
	z	-2	0	0	2	0	0	1		Γ_4'

Η λύση του Π.Γ.Π. είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 0, 4, 1, 0)$$
$$z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2$$

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		Γ'_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		Γ'_2
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$		Γ'_3
	z	-2	0	0	2	0	0	1		Γ'_4

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		Γ_1'
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		Γ_2'
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$		Γ_3'
	z	-2	0	0	2	0	0	1		Γ_4'

- Παρατηρούμε ότι η δεύτερη (P_2) στήλη έχει ευκαιριακό κόστος ίσο με το μηδέν ενώ δεν αποτελεί στήλη του μοναδιαίου πίνακα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		Γ_1'
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		Γ_2'
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$		Γ_3'
	z	-2	0	0	2	0	0	1		Γ_4'

- Παρατηρούμε ότι η δεύτερη (P_2) στήλη έχει ευκαιριακό κόστος ίσο με το μηδέν ενώ δεν αποτελεί στήλη του μοναδιαίου πίνακα.
- Επομένως, το παραπάνω Π.Γ.Π. έχει άπειρες λύσεις τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αν βρούμε μια ακόμα λύση από τις άπειρες λύσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1	-1	Γ_1'
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	Γ_2'
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$	8	Γ_3'
	z	-2	0	0	2	0	0	1		Γ_4'

- Επιλέγουμε την στήλη P_2 και υπολογίζουμε τα θ.
- Επομένως, επιλέγουμε την γραμμή Γ_2 που αντιστοιχεί στη στήλη P_5.
- Υπολογίζουμε το νέο Simplex tableau .

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	-1	3	1	0	0	0	0	-1	
P_2	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
P_4	0	$\frac{15}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
	z	-2	0	0	2	0	0	1	

$$\Gamma_1'' = \Gamma_1' + 2\Gamma_2''$$
$$\Gamma_2'' = \frac{1}{2}\Gamma_2'$$
$$\Gamma_3'' = \Gamma_3' - \frac{1}{2}\Gamma_2''$$
$$\Gamma_4'' = \Gamma_4'$$

Η λύση του Π.Γ.Π. είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0\right)$$
$$z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Από τις λύσεις

$$X' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 0, 4, 1, 0)$$

και

$$X'' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0\right)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμετρική λύση των άπειρων λύσεων από τον τύπο

$$X = \lambda \cdot X' + (1 - \lambda) \cdot X'' \quad \text{με} \quad \lambda \in [0, 1]$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} X &= \lambda \cdot (2, 0, 0, 4, 1, 0) + (1 - \lambda) \cdot \left(3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0\right) \\ X &= \left(3 - \lambda, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, 0, \frac{1}{4}\lambda + \frac{15}{4}, \lambda, 0\right) \quad \text{με} \quad \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\min \quad z = x_1 + x_2 - x_3$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\ -x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & \leq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Να λυθεί με τη βοήθεια της Μεθόδου Simplex .

Τυπική μορφή

$$-\max(-x_1 - x_2 + x_3)$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 2\\
-x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & & & = & 2\\
7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & & & = & 10\\
4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & & & & & & & + & x_7 & = & 6
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Τυπική μορφή
δηλαδή

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Οι στήλες P_4, P_5, P_6 και P_7 σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα και αποτελούν την βάση του αρχικού Simplex tableau .

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z									Γ_5

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0								Γ_5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1							Γ_5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1	1						Γ_5

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1	1	-1					Γ_5

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0				Γ_5

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0			Γ_5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0		Γ_5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0	Γ_5

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ

			-1	-1	1	0	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	-2	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	1	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	-10	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	-3	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0		Γ_5

Επιλογή γραμμής

			-1	-1	1	0	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	-2	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	1	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	-10	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	-3	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0		Γ_5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

			-1	-1	1	0	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	-2	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	1	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	-10	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	-3	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0		Γ_5

Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma'_r = \frac{1}{y_{r,k}}\Gamma_r \\ \Gamma'_i = \Gamma_i - y_{i,k}\Gamma'_r \quad i \neq r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Gamma'_2 = \frac{1}{y_{2,3}}\Gamma_2 \\ \Gamma'_1 = \Gamma_1 - y_{1,3}\Gamma'_2 \\ \Gamma'_3 = \Gamma_3 - y_{2,3}\Gamma'_2 \\ \Gamma'_4 = \Gamma_4 - y_{4,3}\Gamma'_2 \\ \Gamma'_5 = \Gamma_5 - y_{5,3}\Gamma'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Gamma'_2 = \frac{1}{2}\Gamma_2 \\ \Gamma'_1 = \Gamma_1 + \Gamma'_2 \\ \Gamma'_3 = \Gamma_3 + \Gamma'_2 \\ \Gamma'_4 = \Gamma_4 + 2\Gamma'_2 \\ \Gamma'_5 = \Gamma_5 + \Gamma'_2 \end{array}$$

και δημιουργούμε το επόμενο Simplex tableau .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

			-1	-1	1	0	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	-2	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	1	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	-10	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	-3	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0		Γ_5

B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \Gamma_2'$
P_3	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma_2' = \frac{1}{2}\Gamma_2$
P_6	0	11	$\frac{13}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0		$\Gamma_3' = \Gamma_3 + \Gamma_2'$
P_7	0	8	3	-1	0	0	1	0	1		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_2'$
	z	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma_5' = \Gamma_5 + \Gamma_2'$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

			-1	-1	1	0	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	-2	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	1	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	-10	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	-3	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0		Γ_5

B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma'_1 = \Gamma_1 + \Gamma'_2$
P_3	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma'_2 = \frac{1}{2}\Gamma_2$
P_6	0	11	$\frac{13}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0		$\Gamma'_3 = \Gamma_3 + \Gamma'_2$
P_7	0	8	3	-1	0	0	1	0	1		$\Gamma'_4 = \Gamma_4 + 2\Gamma'_2$
	z	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma'_5 = \Gamma_5 + \Gamma'_2$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

			-1	-1	1	0	0	0	0		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	-2	Γ_1
P_5	0	2	-1	-7	2	0	1	0	0	1	Γ_2
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	-10	Γ_3
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	1	-3	Γ_4
	z	0	1	1	-1	0	0	0	0		Γ_5

B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	-2	$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \Gamma_2'$
P_3	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{2}{7}$	$\Gamma_2' = \frac{1}{2}\Gamma_2$
P_6	0	11	$\frac{13}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{22}{5}$	$\Gamma_3' = \Gamma_3 + \Gamma_2'$
P_7	0	8	3	-1	0	0	1	0	1	-8	$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_2'$
	z	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma_5' = \Gamma_5 + \Gamma_2'$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

			-1	-1	1	0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_4	0	3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	-2
P_3	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{2}{7}$
P_6	0	11	$\frac{13}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{22}{5}$
P_7	0	8	3	-1	0	0	1	0	1	-8
	z	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	

$$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \Gamma_2'$$
$$\Gamma_2' = \frac{1}{2}\Gamma_2$$
$$\Gamma_3' = \Gamma_3 + \Gamma_2'$$
$$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_2'$$
$$\Gamma_5' = \Gamma_5 + \Gamma_2'$$

- Όταν όλα τα θ είναι αρνητικά τότε το πρόβλημα έχει μη φραγμένη εφικτή περιοχή.
- Επομένως, έχουμε μη πεπερασμένη λύση.

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ & & & & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Να λυθεί με τη βοήθεια της Μεθόδου Simplex .

Τυπική μορφή

- Το δοθέν Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι στην τυπική μορφή.
- Δεν σχηματίζεται ο μοναδιαίος πίνακας με κάποιες από τις στήλες του.
- Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε στο πρόβλημα τεχνητές μεταβλητές έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας.
- Οι τεχνητές μεταβλητές αφαιρούνται από την αντικειμενική συνάρτηση έχοντας ένα συντελεστή M με $M \gg 0$.

Τυπική μορφή

Επομένως, το πρόβλημα θα πάρει την παρακάτω μορφή

$$\max \quad z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 8 \\
& & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 6 \\
& & & & 2x_3 & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 3
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Τυπική μορφή

δηλαδή

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Οι στήλες P_1, P_5 και P_6 σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα και αποτελούν την βάση του αρχικού Simplex tableau .

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z								Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$							Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$	0						Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$	0	$7-M$					Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	−3	1	2	−M	−M	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	−3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$	0	$7-M$	$1-3M$				Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$	0	$7-M$	$1-3M$	$2+2M$			Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$	0	$7-M$	$1-3M$	$2+2M$	0		Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			2	-3	1	2	$-M$	$-M$	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	$16-9M$	0	$7-M$	$1-3M$	$2+2M$	0	0	Γ_4

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ
Επιλογή γραμμής

			2	−3	1	2	$-M$	$-M$		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	8	Γ_1
P_5	$-M$	6	0	1	1	1	1	0	6	Γ_2
P_6	$-M$	3	0	0	2	−3	0	1	$\frac{3}{2}$	Γ_3
	z	$16-9M$	0	$7-M$	$1-3M$	$2+2M$	0	0		Γ_4

			2	-3	1	2	$-M$		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
P_1	2	$\frac{13}{2}$	1	2	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{13}{7}$	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_3'$
P_5	$-M$	$\frac{9}{2}$	0	1	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{9}{5}$	$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_3'$
P_3	1	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	-1	$\Gamma_3' = \frac{1}{2}\Gamma_3$
	z	$\frac{29}{2} - \frac{9}{2}M$	0	$7-M$	0	$\frac{7}{2} - \frac{5}{2}M$	0		

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - Μ–ΜΕΘΟΔΟΣ

			2	−3	1	2	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_1	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0	
P_4	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1	
P_3	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	
	z	$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0	

$$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \tfrac{7}{2}\Gamma_2''$$
$$\Gamma_2'' = \tfrac{2}{5}\Gamma_2'$$
$$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \tfrac{3}{2}\Gamma_2''$$

- επειδή όλα τα ευκαιριακά κόστη είναι θετικά ή μηδέν
- και δεν υπάρχει τεχνητή μεταβλητή στην βάση, αυτό είναι το τελικό Simplex tableau
- Επομένως η άριστη λύση του προβλήματος με τις τεχνητές μεταβλητές (αναθεωρημένο πρόβλημα) είναι άριστη και του αρχικού.

			2	−3	1	2	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_1	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0	
P_4	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1	
P_3	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	
	z	$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0	

$$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \tfrac{7}{2}\Gamma_2''$$
$$\Gamma_2'' = \tfrac{2}{5}\Gamma_2'$$
$$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \tfrac{3}{2}\Gamma_2''$$

- Η λύση είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0\right)$$

- με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - Mx_5 - Mx_6 = \frac{41}{5}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ & & & & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Να λυθεί με τη βοήθεια της Μεθόδου Simplex .

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Τυπική μορφή

- Το δοθέν Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι στην τυπική μορφή.
- Δεν σχηματίζεται ο μοναδιαίος πίνακας με κάποιες από τις στήλες του.
- Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε στο πρόβλημα τεχνητές μεταβλητές έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας.
- Στην πρώτη φάση της μεθόδου λύνουμε το πρόβλημα με αντικειμενική συνάρτηση την

$$\min(x_5 + x_6)$$

ή ισοδύναμα

$$-\max(-x_5 - x_6)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Τυπική μορφή

Επομένως, το πρόβλημα στην πρώτη φάση θα πάρει την παρακάτω μορφή

$$-\max(-x_5 - x_6)$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 8 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & 2x_3 & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 3
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Τυπική μορφή

δηλαδή

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\
A = & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
\end{array}
$$

$$
A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array}
$$

Οι στήλες P_1, P_5 και P_6 σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα και αποτελούν την βάση του αρχικού Simplex tableau .

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	-1	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z								Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	-1	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	-9							Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	−1	−1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	−1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	−1	3	0	0	2	−3	0	1	Γ_3
	z	− 9	0						Γ_4

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	-1	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	-9	0	-1					Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	-1	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	-9	0	-1	-3				Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	-1	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	-9	0	-1	-3	2			Γ_4

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	-1	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	Γ_3
	z	-9	0	-1	-3	2	0		Γ_4

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Κατασκευή αρχικού Simplex tableau

			0	0	0	0	−1	−1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	Γ_1
P_5	−1	6	0	1	1	1	1	0	Γ_2
P_6	−1	3	0	0	2	−3	0	1	Γ_3
	z	− 9	0	− 1	− 3	2	0	0	Γ_4

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Επιλογή στήλης και υπολογισμός των θ
Επιλογή γραμμής

			0	0	0	0	−1	−1		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	0	8	1	2	1	2	0	0	8	Γ_1
P_5	−1	6	0	1	1	1	1	0	6	Γ_2
P_6	−1	3	0	0	2	−3	0	1	$\frac{3}{2}$	Γ_3
	z	−9	0	−1	−3	2	0	0		Γ_4

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

			0	0	0	0	-1	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_1	0	$\frac{13}{2}$	1	2	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{13}{7}$
P_5	-1	$\frac{9}{2}$	0	1	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{9}{5}$
P_3	0	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	-1
	z	$-\frac{9}{2}$	0	-1	0	$-\frac{5}{2}$	0	

$$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_3'$$
$$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_3'$$
$$\Gamma_3' = \frac{1}{2}\Gamma_3$$

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

			0	0	0	0	
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_1	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0	
P_4	0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1	
P_3	0	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	
	z	0	0	0	0	0	

$$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \tfrac{7}{2}\Gamma_2''$$
$$\Gamma_2'' = \tfrac{2}{5}\Gamma_2'$$
$$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \tfrac{3}{2}\Gamma_2''$$

- Η λύση είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0\right)$$

- με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = -\max(-x_5 - x_6) = 0$$

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

- Στην δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό πρόβλημα ξεκινώντας με το τελικό Simplex tableau της πρώτης φάσης.
- Στο αναθεωρημένο Simplex tableau χρησιμοποιούμε τους αντικειμενικούς συντελεστές του αρχικού προβλήματος και υπολογίζουμε εκ'νέου τα ευκαιριακά κόστη.
- Το αρχικό Simplex tableau θα είναι

			2	-3	1	2		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	θ	
P_1	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0		Γ_1
P_4	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1		Γ_2
P_3	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0		Γ_3
	z	$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0		

ΜΕΘΟΔΟΣ *SIMPLEX* - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

			2	−3	1	2		
B	c_i	x_i	P_1	P_2	P_3	P_4	θ	
P_1	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0		Γ_1
P_4	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1		Γ_2
P_3	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0		Γ_3
	z	$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0		

- επειδή όλα τα ευκαιριακά κόστη είναι θετικά ή μηδέν
- Η λύση είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

- με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = \dfrac{41}{5}$